

# 一种寻找具有多项式因子的本征函数的位势的方法

杨 楚 良

(山 东 大 学)

## 摘 要

本文以 Schrödinger 方程为例给出一种寻找具有多项式因子的本征函数的位势的方法,表明原量子力学中的谐振子势和库仑势的本征解是可由本方法给出的二个例子.本方法及结果对强子结构模型理论有一定参考价值,例如文献[4]中的那个在分析紧束缚于某种势阱中的层子的场合下从 Bethe-Salpeter 方程近似导得的微分方程,当以三维球对称势

$$V(r) = V_0 - 2 \left( N + \frac{1}{2} \right) \beta^{-1} \sqrt{V_0} r^2 + V_0 r^6$$

代入并用本方法解之时,某些计算结果如图 2 所示,图中,  $\lambda'$  须理解为介子质量平方  $m^2$  的线性函数,显示出某种“准 Regge 轨迹”行为.

## 一、引 言

轻子对核子的深度非弹实验结果指出<sup>[1]</sup>,强子中的层子是处在一相当深而底部又相当平的势阱中.为从理论上分析,较流行的是用 B-S 方程,已尝试过的势模型有方势阱<sup>[2]</sup>、谐振子势(三维和四维)<sup>[3,4]</sup>及所谓  $\nu$  势<sup>[5]</sup>等.近几年来,另一类工作,即采用夸克束缚的非相对论线性位势模型,用 Schrödinger 方程进行分析,因其能从另一角度得到 Regge 轨迹,故也颇受注意.文献[4]中把 B-S 方程在分析紧束缚于势阱中的层子的场合下简化成一个线性齐次二阶微分方程,该方程的解法实与解 Schrödinger 方程相仿.上述各种势模型都尚有改进的必要,但至今,有非微扰论的解析形式的精确本征解的势例仍然是不多的,任何其它势模型的尝试,看来取决于发展一种求本征解的新方法,本文将作这样的尝试.

本文第二节给出一种寻找具有多项式因子的本征函数的位势及其本征解的方法,发现原量子力学中的谐振子势和库仑势的本征解只不过是可用本方法求得的最简单的二个例子,引起作者重视的是如(16)'式所示的势阱模型,它的本征解在第三节给出,第四

节中指出,此解也是在相应近似下的 B-S 方程的解,显示出某种“准 Regge 轨迹”行为。

## 二、具有多项式因子的本征函数的势及其本征解

设球对称势阱  $V(r)$  为多项式形式, Schrödinger 方程的径向部分可化成<sup>1)</sup>

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + [\lambda - F(r)]\chi = 0, \quad (1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \psi(r, \theta, \varphi) &= R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ R(r) &= \frac{\chi(r)}{r}, \\ F(r) &= \frac{l(l+1)}{r^2} + \beta^2 V(r), \\ \beta^2 &= \frac{2\mu}{\hbar^2}, \\ \lambda &= \beta^2 E, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其它符号不言自明。为简单计,下面也称  $F(r)$  为势函数。引入变换

$$\chi(r) = H(r)e^{-G(r)}, \quad (3)$$

式中变换函数  $G(r)$  待定,(1)式化成

$$\dot{H} - 2\dot{G}\dot{H} + (\lambda - F + \dot{G}^2 - \ddot{G})H = 0, \quad (4)$$

(顶上带撇表示微商,) 本节的目标是寻找哪些多项式势  $F(r)$  所相应的本征函数具有多项式因子  $H(r)$

$$H(r) = r^s \sum_{\nu=0}^n a_\nu r^\nu, \quad a_0 \neq 0, \quad (5)$$

(5) 式可看成是用级数解法解(4)式所得者,系数  $a_\nu$  满足“上下截止条件”,意指

$$a_\nu = 0, \quad \begin{aligned} &\nu < 0, \quad \nu > n; \quad (\text{当 } n \geq 0 \text{ 时}) \\ &\nu > 0, \quad \nu < n. \quad (\text{当 } n \leq 0 \text{ 时}) \end{aligned}$$

关于  $R(r)$ , 作者认为只需满足其径向几率密度  $r^2 R(r)$  处处有限并可积(指可归一)即可,为此,  $G(r)$  和  $H(r)$  应受如下约束:

1.  $G(r)$  中不必包含  $\ln r$  项,亦即  $\dot{G}$  中不必包含  $r^{-1}$  项,这是因为若  $G(r) = A \ln r + G_1(r)$ , 则  $\chi(r) = r^{-A} H(r) e^{-G_1(r)}$ , 如(5)式所示,  $A$  可并入  $S$  中,亦即  $G(r)$  中的  $\ln r$  项可吸收入多项式  $H(r)$  中。

2.  $s \geq 0$  时,应保证  $n \geq 0$  及  $G(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} +\infty$ ; 反之,  $s < 0$  时,应保证  $n \leq 0$  及  $G(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} +\infty$ 。

下文用到时,将以条件 1 和 2 简称之。以(5)式代入(4)式后整理得到的系数  $a_\nu$  的递推

1) 对二体问题,此为相对运动部分,  $\mu$  是折合质量。

方式将因  $\dot{G}$  和  $F$  的形式而异, 下面按系数递推的简繁顺序分类讨论, 应注意 (6) 式和 (17) 式分别是系数递推最简单和次简单的情况, 相应的  $F(r)$  及本征解是我们寻求的目标.

$$(I) \quad \dot{G} = B_m r^{m+1}, \quad (G = (m+2)^{-1} B_m r^{m+2}), \quad (6a)$$

$$\lambda - F + \dot{G}^2 - \ddot{G} = -\frac{C}{r^2} + D_m r^m. \quad (6b)$$

以 (6) 式代入 (4) 式, 可整理得  $a_v$  的递推方程

$$[(v+s)(v+s-1) - C]a_v - \{2[v+s-(m+2)]B_m - D_m\}a_{v-(m+2)} = 0, \quad (7)$$

这是下标以  $(m+2)$  为单位间隔的相邻系数的逐项直接递推, 进一步的讨论应区别三种情况:  $m+2=0$ ,  $m+2>0$  和  $m+2<0$ .

$m+2=0$  时, 按条件 1 可取  $B_m=0$ , (6b) 式右边二项可合并, 即可取  $D_m=0$ , (7) 式变成

$$[(v+s)(v+s-1) - C]a_v = 0,$$

为保证  $a_0 \neq 0$ , 知应

$$s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + C}, \quad (8)$$

$a_0$  也就是唯一的不为零的系数, 于是

$$\chi(r) = \mathcal{A}_1 r^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + C}} + \mathcal{A}_2 r^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + C}},$$

易见这种解不能同时满足径向几率密度处处有限和可归一的要求, 故  $m+2=0$  的情况应排除.

$m+2>0$  时, 从 (6a) 式及条件 2 知应保证  $B_m > 0$ ,  $s \geq 0$ ,  $n \geq 0$ . 同理,  $m+2 < 0$  时, 应保证  $B_m < 0$ ,  $s \leq 0$ ,  $n \leq 0$ . 注意到上述, 这二种情况可统一地按 (7) 式处理之, 由“下截止条件”仍得 (8) 式, 为使该式有意义, 应  $C \geq -\frac{1}{4}$ , 在  $C \geq 0$  时, (8) 式中的“ $\pm$ ”号的取法显然应

$$s = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + C}, \quad m+2 > 0 \text{ 时, } (C=0 \text{ 时应包括 } s=0) \quad (8)'$$

$$s = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + C}, \quad m+2 < 0 \text{ 时.}$$

按“上截止条件”由 (7) 式可得

$$D_m = 2(n+s)B_m, \quad (9)$$

结合条件 2, 上式表明对  $m+2 > 0$  和  $m+2 < 0$  都有  $D_m \geq 0$ . 显然,  $n$  应是  $(m+2)$  的整数倍

$$n = \eta(m+2), \quad \eta \text{ 是正整数.} \quad (10)$$

以 (6a) 式代入 (6b) 式, 并用到 (9) 式, 可得

$$F(r) = \lambda + \frac{C}{r^2} - 2 \left[ n + s + \frac{1}{2} (m+1) \right] B_m r^m + B_m^2 r^{2(m+1)}, \quad (11)$$

这表明凡能用上述步骤求本征解的势的一般形式只能为

$$F(r) = F_0 + F_{-2}r^{-2} + F_m r^m + F_{2(m+1)}r^{2(m+1)}. \quad (12)$$

凡是给定势属于(12)式所示形式者(式中各系数都是给定值),可由比较(12)式和(11)式确定  $B_m$  及相应本征解,注意到(8)式确定  $s$ , 所得结果按  $m$  的数值分成三大类如表1所示,因为只要参数已知,从(7)式求出系数后得到本征函数是很平凡的,故表中本征函数部分从略. 由表1可见,  $m = 0$  类,若  $F_{-2} = l(l+1)$ ,  $F_0 = 0$ , 则势正是三维球谐

表1 势(12)式用本方法(I)求解结果列表

类别	$F(r)$	由与(11)式比较知	本征值
$m = 0$	$F_0 + F_{-2}r^{-2} + F_2r^2$	$\lambda - 2\left(n+s + \frac{1}{2}\right)B_m = F_0,$ (13a) $B_m = \sqrt{F_2},$ (13b)* $C = F_{-2}.$ (13c)	由(13.b)式代入(13.a)式得 $\lambda = F_0 + 2\sqrt{F_2}\left(n+s + \frac{1}{2}\right).$ (13d)
$m = -1$	$F_0 + F_{-2}r^{-2} + F_{-1}r^{-1}$	$\lambda + B_m^2 = F_0$ (14a) $B_m = -F_{-1}/2(n+s),$ (14b)* $C = F_{-2}.$ (14c)	由(14.b)式代入(14.a)式得 $\lambda = F_0 - \frac{F_{-1}^2}{4(n+s)^2}.$ (14d)
$m \neq 0, -1, -2$	(12)式	$\lambda = F_0$ (15a) $B_m = -F_m/2\left[n+s + \frac{1}{2}(m+1)\right],$ (15b) $B_m = \pm\sqrt{F_{2(m+1)}},$ (15c)** $C = F_{-2}.$ (15d)	$\lambda = F_0$

\* )  $m = 0, -1$  都属于  $m+2 > 0$  的情况,应  $B_m > 0$ , 故分别限于  $F_2 > 0$  和  $F_{-1} < 0$  的势.

\*\* ) 其正负号取法由  $m+2$  的正负确定.

振子势,本结果全同于通常量子力学所给者,但因本情况下还包括含  $r^{-2}$  项的  $V(r)$ ,故  $m = 0$  类可称为“泛球谐振子解”.  $m = -1$  类,若  $F_{-2} = l(l+1)$ ,  $F_{-1} = -\beta^2 Z e^2$ ,  $F_0 = 0$ ,本结果正是通常量子力学中的类氢原子解<sup>1)</sup>,同样的理由称此类为“泛库仑(吸引)势解”.表中第三类解是颇为新鲜者,作为示例,附录I给出势  $F(r) = F_0 - 7r^{-4} + r^{-6}$  的详细解法,满足(15)式的势(12)式的特征体现在幂次及系数的相互关系上,对于这么多势都具  $\lambda = F_0$  作为其本征值之一在物理上意味着什么目前尚不清楚,但可指出,由于  $r = 0$  不是这类势阱的极小值点,故并不牵涉到所谓零点能的概念问题,还可指出,  $\lambda = F_0$  并不一定是这类势的唯一的本征值,例如  $m = 2$  的

$$F(r) = F_0 + \frac{l(l+1)}{r^2} - 2\left(N + \frac{1}{2}\right)\sqrt{F_6}r^6 + F_6r^6, \quad F_6 > 0, \quad (16)$$

(式中  $N \geq 1$ , 是整数,)用下面即将介绍的方法(II)可求得其它的本征解.

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad \dot{G} &= B_{m_1}r^{m_1+1} + B_{m_2}r^{m_2+1}, \\ (G &= (m_1+2)^{-1}B_{m_1}r^{m_1+2} + (m_2+2)^{-1}B_{m_2}r^{m_2+2},) \end{aligned} \quad (17a)$$

1) 以周世勋编“量子力学”为例,本文式中的  $n$  是书中的  $n_r$ . 另外,一般书中是要求  $R(r)$  处处有限,此时从(8)式知  $s = l+1$ .

$$\lambda - F + \dot{G}^2 - \ddot{G} = -\frac{C}{r^2} + D_{m_1} r^{m_1} + D_{m_2} r^{m_2},$$

$$|m_2 + 2| > |m_1 + 2|. \quad (17b)$$

这显然是除(6)式外最简单的情况,上面关于  $m+2$  的符号与  $B_m$ 、 $S$  及  $n$  的符号关系的讨论在此仍然有效,显然要求  $m_1+2$  与  $m_2+2$  同号。(17)式代入(4)式后可整理得

$$[(v+s)(v+s-1)-C]a_v - \{2[v+s-(m_1+2)]B_{m_1} - D_{m_1}\}a_{v-(m_1+2)} - \{2[v+s-(m_2+2)]B_{m_2} - D_{m_2}\}a_{v-(m_2+2)} = 0, \quad (18)$$

“下截止条件”给出(8)'式,且要求

$$a_v = 0, \quad \begin{cases} 0 < v < m_1 + 2 & (\text{当 } m_1 + 2 > 0 \text{ 时}); \\ 0 > v > m_1 + 2 & (\text{当 } m_1 + 2 < 0 \text{ 时}). \end{cases} \quad (19)$$

“上截止”于  $a_n$  的条件要求

$$D_{m_2} = 2(n+s)B_{m_2}, \quad (20)$$

$$a_v = 0, \quad \begin{cases} n - (m_2 - m_1) < v < n & (\text{当 } m_1 + 2 > 0 \text{ 时}); \\ n - (m_2 - m_1) > v > n & (\text{当 } m_1 + 2 < 0 \text{ 时}). \end{cases} \quad (21)$$

因仅当(21)式是在(19)式的前提下按(18)式自然递推的结果时,“上截止”才能实现,故应

$$m_1 + 2 = m_2 - m_1, \quad m_2 = 2(m_1 + 1). \quad (22)$$

引入  $w = m_1 + 2$ ,  $m_2 + 2 = 2w$ , (18)式可写成

$$[(v+s)(v+s-1)-C]a_v - [2(v+s-w)B_{m_1} - D_{m_1}]a_{v-w} - [2(v+s-2w)B_{m_2} - D_{m_2}]a_{v-2w} = 0, \quad (18)'$$

显然应有  $n = \eta w$ , 于是满足“上下截止条件”的系数递推方程可详列如下

$$[s(s-1)-C]a_0 = 0, \quad (23a)$$

$$[(w+s)(w+s-1)-C]a_w - (2sB_{m_1} - D_{m_1})a_0 = 0, \quad (23b)$$

$$[(2w+s)(2w+s-1)-C]a_{2w} - [2(w+s)B_{m_1} - D_{m_1}]a_w - (2sB_{m_2} - D_{m_2})a_0 = 0, \quad (23c)$$

⋮

$$[(\eta w + s)(\eta w + s - 1) - C]a_{\eta w} - \{2[(\eta - 1)w + s]B_{m_1} - D_{m_1}\}a_{(\eta-1)w} - \{2[(\eta - 2)w + s]B_{m_2} - D_{m_2}\}a_{(\eta-2)w} = 0, \quad (23d)$$

$$- \{2[\eta w + s]B_{m_1} - D_{m_1}\}a_{\eta w} - \{2[(\eta - 1)w + s]B_{m_2} - D_{m_2}\}a_{(\eta-1)w} = 0, \quad (23e)$$

$$- \{2[\eta w + s]B_{m_2} - D_{m_2}\}a_{\eta w} = 0. \quad (23f)$$

(23a—d)式是满足“下截止条件”的系数递推,(23e—f)式是“上截止条件”的体现,(23f)式就是(20)式.在(8)'式和(20)式代入后,原则上即可从(23a—d)式求得以  $B_{m_1}$ 、 $B_{m_2}$ 、 $C$ 、 $D_{m_1}$  和  $n$  为参数的各系数(指与  $a_0$  之比),因而(23e)式可视为这些参数所需满足的约束方程,可形式地表示为

$$f(B_{m_1}, B_{m_2}, C, D_{m_1}, n) = 0. \quad (24)$$

(17)式给出

$$F(r) = \lambda + \frac{C}{r^2} - [(m_1 + 1)B_{m_1} + D_{m_1}]r^{m_1} \\ + \{B_{m_1}^2 - [2(m_2 + 1) + 1]B_{m_2} - D_{m_2}\}r^{2(m_1+1)} + 2B_{m_1}B_{m_2}r^{3m_1+4} + B_{m_2}^2r^{4m_1+6}, \quad (25)$$

若限于较熟悉的情况  $C = l(l+1)$ , 且以(20)式代入, 则

$$F(r) = \lambda + \frac{l(l+1)}{r^2} - [(m_1 + 1)B_{m_1} + D_{m_1}]r^{m_1} \\ + \left\{ B_{m_1}^2 - 2 \left( n + s + m_1 + \frac{3}{2} \right) B_{m_2} \right\} r^{2(m_1+1)} + 2B_{m_1}B_{m_2}r^{3m_1+4} + B_{m_2}^2r^{4m_1+6}, \quad (25)'$$

这表明凡满足上式所示的幂次及势系数要求的如下形式的势 (可注意到与真正势成比例的是  $F(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}$ ) 可用本模式 (II) 处理之,

$$F(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} = F_0 + F_{m_1}r^{m_1} + F_{2(m_1+1)}r^{2(m_1+1)} + F_{3m_1+4}r^{3m_1+4} + F_{4m_1+6}r^{4m_1+6}, \quad (26)$$

具体求解步骤几乎与前类同, 只是(23)式所示的递推方式比(7)式复杂些. 由前类求解的经验知, 当(25)'式右边除第一项外其它项幂次均不为零时, 用本步骤只能求得  $\lambda = F_0$ , 仅当还有其它项出现零幂次时, 才有可能求得其它本征解, 在  $m_1$  为整数的范围内, 后者只有二种可能, 即  $m_1 = 0$  和  $m_1 = -1$ , 现分别讨论之.

$m_1 = 0$  时

$$F(r) = \lambda - B_{m_1} - D_{m_1} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \left[ B_{m_1}^2 - 2 \left( n + s + \frac{3}{2} \right) B_{m_2} \right] r^2 \\ + 2B_{m_1}B_{m_2}r^4 + B_{m_2}^2r^6, \quad (27)$$

(16)式所示的势就属于本类, 由比较知

$$B_{m_2} = \sqrt{F_6}, \quad B_{m_1} = 0, \quad (16a)'$$

$$N = n + s + 1, \quad (16b)'$$

$$\lambda = F_0 + D_{m_1}. \quad (16c)'$$

(16b)'式结合(8)'式表明, 在给定  $N$  下,  $l$  有上限, 存在多种组合  $(n, l)$ , 每一种  $(n, l)$  均可按(23)式求解, (24)式此时化成形式  $f(D_{m_1}, n, l) = 0$ , 此方程的根的个数就是一定  $(n, l)$  下本征值的个数. 作者认为如(16)式所示的势阱对强子结构模型理论可能具有参考价值, 故下节将给出详细分析. 这里可注意到,  $B_{m_1} = 0$  表明此处的变换函数  $G$  与(I)中无异, 只是由于(17b)式比之(6b)式略有变化, 却使我们能求得(I)所不能给出的本征解.

$m_1 = -1$  时,

$$F(r) = \lambda + B_{m_1}^2 - 2 \left( n + s + \frac{1}{2} \right) B_{m_2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - D_{m_1}r^{-1} + 2B_{m_1}B_{m_2}r + B_{m_2}^2r^2, \quad (28)$$

这基本上是库仑势和球对称二项式势阱的叠加, 可能适用于受强作用或超强作用束缚的

二带电粒子体系，拟留待以后详细分析。

以上 (I) 和 (II) 已介绍出本方法的梗概，继续按此线索，包含更多项的模式将可处理更多的势，当然，项数愈多，系数递推方式愈复杂，求解会愈麻烦。现指出，(16) 式所示的势，除上述 (I) 和 (II) 二种模式外，已不能纳入包含更多项的其它模式之中。

### 三、多项式势阱 (16) 式的本征解

与(16)式相应的真正势为

$$V(r) = V_0 - 2 \left( N + \frac{1}{2} \right) \beta^{-1} \sqrt{V_6} r^2 + V_6 r^6, \quad V_6 > 0, \quad (16)'$$

如图 1 所示，这种势阱的阱壁比谐振子势阱的陡，原点  $r = 0$  是阱中的极大值点，其极小值点(阱谷)是在如图所示的  $r_m$  处，由 (16)' 式可算得

$$r_m = \left[ \frac{2 \left( N + \frac{1}{2} \right)}{3\beta\sqrt{V_6}} \right]^{1/4}, \quad (29)$$

$$V_0 - V_{\min} = 2 \left[ \frac{2 \left( N + \frac{1}{2} \right)}{3\beta} \right]^{3/2} V_6^{1/4}, \quad (30)$$

势阱底部的变化趋势与谐振子势不同，底部的平坦度决定于  $N$  和  $V_6$ 。对二体问题，就经典意义来说， $r_m$  标志体系的线度。

以 (16)' 式代入 (1) 式，且作自变量变换

$$\xi = \alpha r, \quad \alpha^8 = F_6, \quad (31)$$

即得

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \left\{ \frac{\lambda}{\alpha^2} - \left[ \frac{F_0}{\alpha^2} + \frac{l(l+1)}{\xi^2} - 2 \left( N + \frac{1}{2} \right) \xi^2 + \xi^6 \right] \right\} \chi = 0, \quad (32)$$

可见，只要注意换算

$$r \rightarrow \xi, \quad \lambda \rightarrow \lambda' = \lambda/\alpha^2, \quad F_0 \rightarrow F'_0 = F_0/\alpha^2, \quad (33)$$

上节有关公式可取  $F_6 = 1$  而仍然有效，(32) 式可写成

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + [\lambda' - F(\xi)]\chi = 0, \quad (34)$$

$$F(\xi) = F'_0 + \frac{l(l+1)}{\xi^2} - 2 \left( N + \frac{1}{2} \right) \xi^2 + \xi^6.$$

解上式的主要结果列于表 2 中(其正确性可由直接代入 (34) 式来验证)，图 2 是根据表 2 作出的。求解的具体计算例子请见附录 II，为便于了解，作如下几点说明：

- (1) 如前已指出，与真正势  $V(r)$  成比例的是  $F(\xi) - \frac{l(l+1)}{\xi^2}$ 。

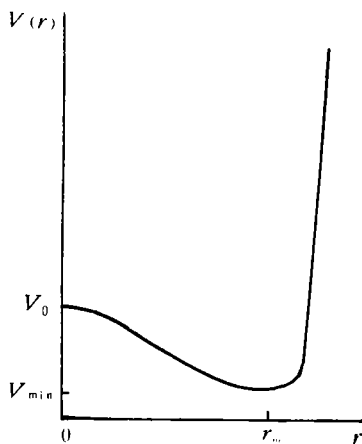


图 1 (16) 式势曲线图

表 2 (16) 式所示势的本征解列表

编号	N	l	n	处理模式	本征值 $\lambda'$	势 $F(\xi) - \frac{l(l+1)}{\xi^2}$	本征函数 $\chi(\xi)$
<1>	1	0	0	<I>	$F_0'$	$F_0' - 3\xi^2 + \xi^6$	$a_0 e^{-\frac{1}{4}\xi^4}$
<2>	2	0	0	<I>	$F_0'$	$F_0' - 5\xi^2 + \xi^6$	$a_0 \xi e^{-\frac{1}{4}\xi^4}$
<3.1>	3	0	2	<II>	$F_0' \pm 2.8$	$F_0' - 7\xi^2 + \xi^6$	$a_0 (1 \mp \sqrt{2} \xi^2) e^{-\frac{1}{4}\xi^4}$
<3.2>		1	0	<I>	$F_0'$		
<4.1>	4	0	3	<II>	$F_0' \pm 4.9$	$F_0' - 9\xi^2 + \xi^6$	同上
<4.2>		0	2	<II>			
<4.3>		2	0	<I>			
<5.1>	5	0	4	<I>	$F_0'; F_0' \pm 8.0$	$F_0' - 11\xi^2 + \xi^6$	$a_0 \left(1 - \frac{2}{3} \xi^2\right) e^{-\frac{1}{4}\xi^4}$
<5.2>		1	2	<II>			
<5.3>		3	0	<I>			
<6.1>	6	0	5	<I>	$F_0'; F_0' \pm 11.3$	$F_0' - 13\xi^2 + \xi^6$	$a_0 \xi \left(1 - \frac{2}{5} \xi^2\right) e^{-\frac{1}{4}\xi^4}$
<6.2>		0	4	<II>			



$\langle 6.3 \rangle$	2	2	$\langle \text{II} \rangle$	$F_0 \pm 7.5$	$a_0 \xi^3 \left( 1 \mp \frac{\sqrt{14}}{7} \xi^2 \right) e^{-\frac{1}{4} \xi^4}$
$\langle 6.4 \rangle$	4	0	$\langle \text{I} \rangle$	$F_0$	$a_0 \xi^2 e^{-\frac{1}{4} \xi^4}$
$\langle 7.1 \rangle$	0	6	$\langle \text{II} \rangle$	$F_0 \pm 15.0,$ $F_0 \pm 3.6$	$a_0 \left[ 1 \mp \sqrt{30 + 12\sqrt{5}} \xi^2 + (4 + 2\sqrt{5}) \xi^4 \right.$ $\left. - \frac{2\sqrt{5}}{15} \sqrt{30 + 12\sqrt{5}} \xi^6 \right] e^{-\frac{1}{4} \xi^4},$
$\langle 7.2 \rangle$	1	4	$\langle \text{I} \rangle$	$F_0;$	$a_0 \xi^2 \left( 1 - \frac{2}{7} \xi^2 \right) e^{-\frac{1}{4} \xi^4}$
$\langle 7.3 \rangle$	3	2	$\langle \text{II} \rangle$	$F_0 \pm 13.9$	$a_0 \xi^2 \left( 1 \mp \frac{4\sqrt{3}}{5} \xi^2 + \frac{2}{5} \xi^4 \right) e^{-\frac{1}{4} \xi^4}$
$\langle 7.4 \rangle$	5	0	$\langle \text{I} \rangle$	$F_0$	$a_0 \xi^6 \left( 1 \mp \frac{\sqrt{2}}{3} \xi^2 \right) e^{-\frac{1}{4} \xi^4}$
					$a_0 \xi^6 e^{-\frac{1}{4} \xi^4}$
					$F_0 - 15\xi^2 + \xi^6$

7

表 2 (续)

编号	$N$	$l$	$n$	处理模式	本征值 $\lambda_i$	势 $F(\xi) = \frac{l(l+1)}{\xi^2}$	本征函数 $X(\xi)$
$\langle 8.1 \rangle$	8	0	7	$\langle \text{II} \rangle$	$F_0 \pm 19.2, F_0 \pm 5.8$	$F_0 - 17\xi^2 + \xi^6$	*
$\langle 8.2 \rangle$		0	6				
$\langle 8.3 \rangle$		2	4	$\langle \text{I} \rangle \langle \text{II} \rangle$	$F_0; F_0 \pm 16$		
$\langle 8.4 \rangle$		4	2	$\langle \text{II} \rangle$	$F_0 \pm 9.4$		
$\langle 8.5 \rangle$		6	0	$\langle \text{I} \rangle$	$F_0$		
$\langle 9.1 \rangle$	9	0	8	$\langle \text{I} \rangle;$ $\langle \text{II} \rangle$	$F_0;$ $F_0 \pm 23.6;$ $F_0 \pm 9.2$	$F_0 - 19\xi^2 + \xi^6$	*
$\langle 9.2 \rangle$		1	6	$\langle \text{II} \rangle$	$F_0 \pm 22.6;$ $F_0 \pm 7.2$		
$\langle 9.3 \rangle$		3	4	$\langle \text{I} \rangle;$ $\langle \text{II} \rangle$	$F_0;$ $F_0 \pm 17.9$		
$\langle 9.4 \rangle$		5	2	$\langle \text{II} \rangle$	$F_0 \pm 10.2$		
$\langle 9.5 \rangle$		7	0	$\langle \text{I} \rangle$	$F_0$		

\*) 表式太长, 从略.

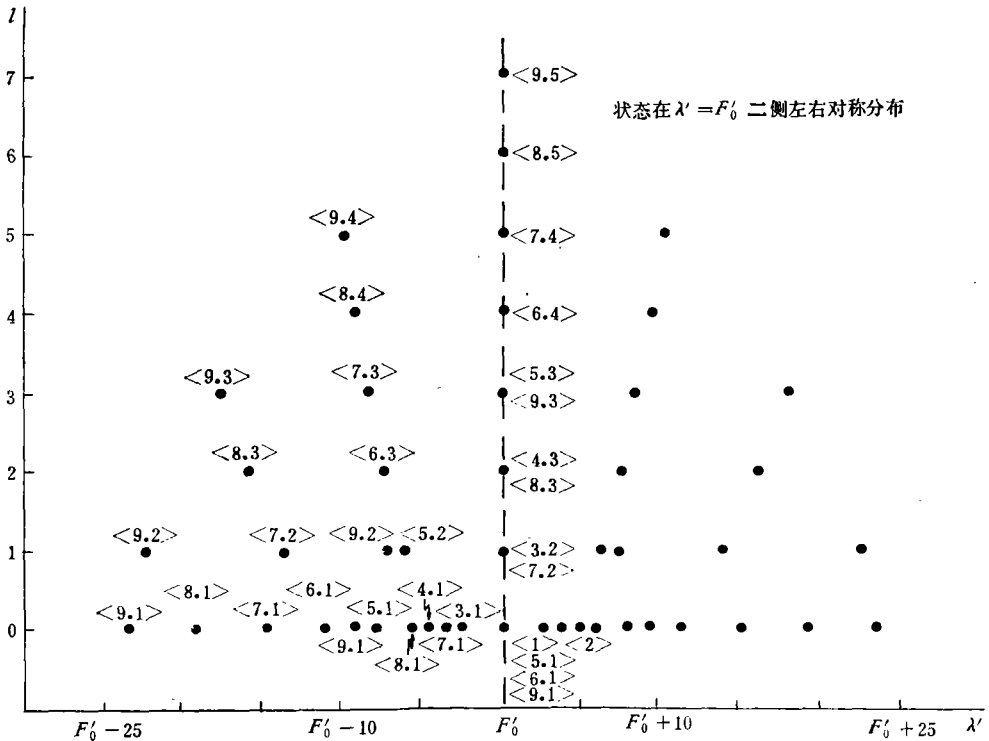


图 2 状态在  $(l, \lambda')$  平面上的分布

(2)  $N = n + s + 1$ , 由 (8)' 式知,  $l = 0, s = 0$  时,  $N = n + 1$ ;  $l > 0, s > 0$  时,  $s = l + 1, N = n + l + 2$ .

(3) 当  $l = 0, s = 0$  时,  $a_0$  和  $a_1$  可同时不为零, 从  $a_1$  可独立地递推一套系数, 对此显然应  $n = \eta w + 1$ , 但这一套其实和  $a_0$  那一套相应于同一解。

(4) 当按模式 (I) 处理时,  $m = 2$ , 系数下标单位间隔是 4; 当按模式 (II) 处理时, 系数下标单位间隔则是  $w = 2$ , 此时为保证“上截止条件”, 必需  $n \geq 2$ .  $n < 2$  的态只能按模式 (I) 处理。

从表 2 所列的实际计算结果可看到, 对于给定的  $N$ ,  $(l, s, n)$  中只其一是独立的, 通常是取  $l$  为状态量子数, 描写态的另一独立量子数是与  $l$  一定时  $\lambda'$  的多值相应的, 以表中 <9.1> 为例,  $l = 0$  时有

$$\lambda'_1 = F'_0 - 23.6, \quad \lambda'_2 = F'_0 - 9.2, \quad \lambda'_3 = F'_0,$$

$$\lambda'_4 = F'_0 + 9.2, \quad \lambda'_5 = F'_0 + 23.6,$$

若以  $i$  示此量子数, 则不计自旋时以  $(i, l, m)$  ( $m$  是磁量子数) 标志本征态。

从表 2 还可发现, 在给定的  $N$  下,  $l$  有上限, 且  $l$  取值非偶即奇, 唯  $l = 0$  除外。由于本文没有讨论所得本征解的完备程度, 故还不能断言被本方法排除的态实际上是否存在。给定的  $N$  愈大, 允许存在的  $l$  愈多, 如图 2 所示, 若注目于每一编号中本征值取偏离  $F'_0$  最大者的那些态, 则近似地有  $\lambda'$  与  $l$  成线性关系, 类似于 Regge 轨迹。

## 四、讨 论

朱重远和安瑛在分析紧束缚于势阱中的层子的场合下从 B-S 方程导得的那个近似的微分方程<sup>[4]</sup>,在分离出时间部分后,其空间部分(指三维)的方程实属(1)式的形式,故表 2 和图 2 也可看成是采用势阱模型(16)'式的介子结构在紧束缚近似下解 B-S 方程的结果,唯需注意此时的  $\lambda'$  应理解为介子质量平方的线性函数,图 2 显示出在给定势下( $N$  取定值)的某种“准 Regge 轨迹”行为,新奇的是,存在着以  $\lambda' = F_0$  为轴的斜率反号的对称轨线,还存在一些偏离轨线的状态,相应于不同  $N$  值的轨线近似地平行.此外,若能认为表 2 所给的结果是完备的,则介子的自旋存在上限.  $N$  似乎是描写层子的一个良好的特征数.

本方法是一种非微扰理论,所得的解是精确解,本方法最大的局限性是不清楚所得结果的完备程度,当然,作为二个例子的谐振子解和类氢原子解的完备性是没有疑问的.

E. Kamke 指出<sup>[7]</sup>,方程 ( $n > 1$ )

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + (\lambda - \chi^{2n})\psi = 0$$

的精确本征解至今未找到,本文指明了这种方程的解应在不是如本文(3)和(5)式所示形式的框架中去寻找.

### 附 录 I $F(r) = F_0 - 7r^{-4} + r^{-6}$ 的本征解

由(11)式知  $m = -4$ , 由(15)式知  $\lambda = F_0$ ,  $B_m = -1$ ,  $C = 0$ , 由(8)'式知  $s = 0$ , 由(15b)式知  $n = -2$ , 由(9)式知  $D_m = 4$ , 于是由(7)式算得  $a_{-2} = -\frac{2}{3}a_0$ , 从而

$$H(r) = a_0 \left( 1 - \frac{2}{3} r^{-2} \right),$$

$$G(r) = \frac{1}{2} r^{-2},$$

$$\chi(r) = a_0 \left( 1 - \frac{2}{3} r^{-2} \right) e^{-\frac{1}{2} r^{-2}}.$$

此  $\chi(r)$  显然处处有限且平方可积,可由直接代入(1)式知它确为本征值  $\lambda = F_0$  的本征函数.

### 附 录 II 表 2 结果的具体计算

由(15c)式及(16a)'式知在二种模式中都是

$$G' = \xi^3, \quad G = \frac{1}{4} \xi^4.$$

表 2 中凡按模式(1)处理者,可具体地如附录 I 所示那样计算. 现以表 2 中编号(3.1)为

例,表明按模式 (II) 的具体计算方法,其它态的计算大同小异.

(3.1): 由 (23. b) 式和 (23. c) 式得

$$2a_2 + D_{m_1} a_0 = 0,$$

$$D_{m_1} a_2 + 4a_0 = 0,$$

方程组有非零解的条件是系数行列式为零,解得  $D_{m_1} = \pm 2\sqrt{2}$ , 代入方程后算得

$$\frac{a_2}{a_0} = \mp \sqrt{2},$$

于是从 (16. c)' 式及 (5) 式得

$$\lambda' = F'_0 \pm 2\sqrt{2},$$

$$H(\xi) = a_0(1 \mp \sqrt{2}\xi^2),$$

$$\chi(\xi) = a_0(1 \mp \sqrt{2}\xi^2)e^{-\frac{1}{2}\xi^4}.$$

### 参 考 文 献

- [1] R. P. Feynman, *Science*, **183** (1972), 601.
- [2] R. F. Keam, *Journ. Math. Phys.*, **10** (1969), 594.
- [3] M. Bohm et al., *Nucl. Phys.*, **51B** (1973), 397;  
D. Z. Winkel, *Journ. Math. Phys.*, **16** (1975), 93.
- [4] 胡宁, 科学通报, **3** (1978), 129; 朱重远、安瑛, 科学通报, **3** (1978) 154.
- [5] 洗鼎昌等, 物理学报, **27** (1978), 94.
- [6] A. F. Antippa, A. E. Evertt and A. J. Phares, *Nuovo Cimento.*, **43A** (1978), 347.
- [7] E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1977.

## A METHOD FOR FINDING POTENTIALS CORRESPONDING TO POLYNOMIAL-FACTOR EIGENFUNCTIONS IN QUANTUM MECHANICS

YANG CHU-LIANG  
(Shantung University)

### ABSTRACT

A method for finding potentials corresponding to polynomial-factor eigenfunctions is given for the Schrödinger equation as an example. It is shown that the eigen-solutions for harmonic and Columb's potentials in quantum mechanics are the two examples which can be given by this method and some other examples are discovered. This method and some results of this paper may be useful for hadron structure model theory. One of the examples is the equation in Ref. (4) which is derived from Bethe-Salpeter equation for the case that the straton is tightly bounded in certain potential well. When this method is applied to that equation for three dimensional central symmetric potential  $V(r) = V_0 - 2 \left( N + \frac{1}{2} \right) \beta^{-1} \sqrt{V_0} r^2 + V_0 r^6$ , some results are obtained as shown in Fig. 2 in which  $\lambda'$  must be considered as a linear function of  $m^2$ . The so called "quasic Regge trajectory" behavior is manifested.