第3卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 4
1979年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1979

原子核的单粒位阱(III)

——非厄米位阱$u_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$的本征值

吴式枢
(吉林大学物理系)

摘　　要

本文证明了以下结果：虽然单粒位阱 $u_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$ [或 $u_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)$，$M_{\alpha\beta}(\omega)$ 为质量算符] 是非厄米的，但由它所确定的断续本征值 ε_γ 却一定是实的，而且严格满足以下关系：

$$\varepsilon_\gamma=\pm[E_{n\gamma}(N\pm1)-E_0(N)]$$

其中 $E_0(N)$ 与 $E_{n\gamma}(N\pm1)$ 分别表示满壳核(核子数为 N) 基态与 $(N\pm1)$ 核的严格能量本征值.

此外，为了判断任一单粒位阱的本征值是否也可能满足上述关系，文中给出了一个计算其判据的简便方法. 应用这方法还可很容易地算出单粒格林函数的振幅修正.

一、引　言

设 $\boldsymbol{u}$ 为某一单粒位阱，由以下单粒 Schrödinger 方程

$$\boldsymbol{h}\,|\gamma\rangle=(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{u})|\gamma\rangle=\varepsilon_\gamma|\gamma\rangle, \tag{1}$$

所确定的本征值与本征函数将不仅称为 $\boldsymbol{h}$，也将简称为 $\boldsymbol{u}$ 的本征值与本征函数. 针对核结构或其它有限体系的结构问题，本文将主要考虑式(1)的断续谱. 这里，一个长期没有解决的问题是：存不存在单粒位阱 $\boldsymbol{u}$，其断续谱 ε_γ 严格满足以下关系

$$\varepsilon_\gamma=\pm[E_{n\gamma}(N\pm1)-E_0(N)], \tag{2}$$

?为了回答这个问题，文 [I][1] 所述定理曾给出了以下判据(简称判据 A)：

倘若 $1-\mathscr{M}'_{\gamma\gamma}(\varepsilon_\gamma)\neq0$，或者至少存在一个 $\alpha\,(\neq\gamma)$ 使 $\mathscr{M}_{\gamma\alpha}(\varepsilon_\gamma)\neq0$ 或 $\mathscr{M}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\gamma)\neq0$，则 ε_γ 必满足式(2).

人们可能怀疑，判据 A 是不是具有实质性的新内容，因为类似于它，人们早就知道下述判据(简称判据 B)：

倘若 ε_γ 是单粒格林函数 $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 的一个极点，则 ε_γ 必满足式(2).

我们注意，虽然判据 A 和 B 有密切关系，但是它们之间却有一个重要的区别，即不论

本文1978年2月18日收到.

判据 A 中的条件是否满足，ε_γ 恒是其中诸函数：$1-\mathscr{M}'_{\gamma\gamma}(\omega)$，$\mathscr{M}_{\gamma\alpha}(\omega)$ 与 $\mathscr{M}_{\alpha\gamma}(\omega)$ 的有理点，而判据 B 则要求 ε_γ 为 $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 的奇异点．这个区别使我们便于找寻直接计算判据 A 的简捷方法．此外，如果判据 A 中的量不等于零，则它们都有直接的物理意义，因此它们本身就是我们需要求的量．本文的一个目的就是给出一个计算判据 A 及其中所含各量的简便方法．

文 [II][2] 曾对以下单粒位阱

$$u_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)\ [\text{或}\ M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)],\tag{3}$$

作过较仔细的讨论．应用文中提出的方法，除研究了上述位阱的抵销性外，还对剩余项进行了分析．当按式(3)选择 $\boldsymbol{u}$ 时，文中指出，单粒格林函数的主部与非主部均可得到简化，例如，其主部可简化为

$$\left.\begin{aligned}G_{pp'}(t>0)&=A_{pp'}\,e^{-i\varepsilon_p t}+P_{pp'}\\ G_{hh'}(t<0)&=-A_{hh'}\,e^{-i\varepsilon_h t}+P_{hh'}\end{aligned}\right\},\tag{4}$$

其中 $P_{\alpha\alpha'}$ 表示 $M^{\text{off}}(\omega)$ 的极点的贡献，$A_{\alpha\alpha'}$ 严格等于

$$\left.\begin{aligned}A_{\alpha\alpha}&=1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)\\ A_{\alpha\alpha'}&=\mathscr{M}_{\alpha\alpha'}(\varepsilon_\alpha)\ G^0_{\alpha'}(\varepsilon_\alpha)\quad(\alpha\neq\alpha')\end{aligned}\right\}.\tag{5}$$

我们将简称 $A_{\alpha\alpha'}$ 为单粒格林函数的振幅，$(A_{\alpha\alpha'}-\delta_{\alpha\alpha'})$ 为其振幅修正．

式(5)说明，倘若 $A_{pp'}$ 中有一个不等于零，则按判据 A 必有

$$\varepsilon_p=E_{n_p}(N+1)-E_0(N),\tag{6-1}$$

同样，如果 $A_{hh'}$ 中有一个不等于零，则

$$\varepsilon_h=E_0(N)-E_{n_h}(N-1).\tag{6-2}$$

因为 $E_0(N)$ 与 $E_n(N\pm1)$ 均为实数，所以倘若式(6)成立，则 ε_γ 必为实数．这启示我们，以下结论 [简称结论 A] 可能成立：

虽然式 (3) 中的单粒位阱是非厄米的，但它的断续本征值 ε_γ 却一定是实的，而且严格满足式(2).

本文的另一个目的就是给予上述结论一个严格证明．Becker 与 Jones [BJ][3] 曾认为 $M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$ [或 $M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)$] 是复的，由此有限核的断续谱也将是复的．文[II] 已指出，除非级数收敛很快，不然由摄动展开式所反映的极点并不近似等于 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的真正极点，对于断续谱区我们将证明 ε_β 一定不是 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的极点，因此 BJ 的论据是不充分的．结论 A 不仅给出了单粒位阱 $u_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$ [或 $M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)$] 所具有的一个重要和突出的性质，同时也具体回答了本节开始时所提到的问题．此外，式(2)成立也可看为是式(3)所示位阱具有十分好的抵销性的一个标志．由于文 [I] 与 [II] 都曾假定 ε_γ 是实的，因此结论 A 的证明也是我们这一系列工作的一个理论基础．

我们将在第二节先证明结论 A，第三节将给出一个计算判据 A 与振幅 $A_{\alpha\alpha'}$ 的简便方法，最后第四节将对所得结果再作一些进一步的讨论．如未加说明，本文所用符号与前二文相同．关于公式将采用以下编号：例如，式 (I 21) 与 (II 10) 分别表示文 [I] 式 (21) 与文 [II] 式 (10).

二、结论 A 的证明

我们注意，如果 ε_γ 可以是复数，则只有当 $\mathrm{Im}\varepsilon_p \leqslant 0$ 与 $\mathrm{Im}\varepsilon_h \geqslant 0$ 时，单粒格林函数的零级近似 $G^0_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}G^0_\beta(\omega)$ 才存在并可由式（II 14）表示．不然，因为 $G^0_{\alpha\beta}(\omega)$ 不存在，式（II 4）所示 Dyson 方程将没有意义．为了不致受“$G^0_{\alpha\beta}(\omega)$ 是否存在”这个问题的限制，让我们引进 $\bar{M}_{\alpha\beta}(\omega)$，其定义为

$$\bar{M}_{\alpha\beta}(\omega)=\sum_{\gamma\delta}\bar{v}_{\alpha\gamma,\beta\delta}\,\bar{\rho}_{\delta\gamma}-\frac{1}{4}\sum_{\lambda\eta\theta}\sum_{\mu\nu\rho}\bar{v}_{\alpha\lambda,\eta\theta}\,Q(\eta\theta\lambda,\mu\nu\rho;\omega)\,\bar{v}_{\mu\nu,\beta\rho},\tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}_{\alpha\gamma,\beta\delta}&=\langle\bar{\zeta}_\alpha\bar{\zeta}_\gamma|\boldsymbol{v}|\zeta_\beta\zeta_\delta\rangle-\langle\bar{\zeta}_\alpha\bar{\zeta}_\gamma|\boldsymbol{v}|\zeta_\delta\zeta_\beta\rangle\\ \bar{\rho}_{\delta\gamma}&=\langle\Psi_0|\zeta^+_\gamma\bar{\zeta}_\delta|\Psi_0\rangle\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

$Q(\eta\theta\lambda,\mu\nu\rho;\omega)$ 的定义如下：

$$\begin{aligned}Q(\eta\theta\lambda,\mu\nu\rho;\omega)&=\bar{G}_{\eta\theta\lambda,\mu\nu\rho}(\omega)\\&\quad-\sum_{\chi\kappa}\bar{G}_{\eta\theta\lambda,\chi}(\omega)\,\bar{G}^{-1}_{\chi,\kappa}(\omega)\,\bar{G}_{\kappa,\mu\nu\rho}(\omega),\end{aligned}\tag{9}$$

上式中 $\bar{G}_{A,B}(\omega)$ 均为格林函数，其表达式可严格写为

$$\begin{aligned}\bar{G}_{A,B}(\omega)=-\sum_n\Bigg\{&\frac{\langle\Psi_0|\bar{A}|\Psi_n(N+1)\rangle\langle\Psi_n(N+1)|B^+|\Psi_0\rangle}{\omega-\mathscr{E}^+_n+i\hat{\eta}}\\&+\frac{\langle\Psi_0|B^+|\Psi_n(N-1)\rangle\langle\Psi_n(N-1)|\bar{A}|\Psi_0\rangle}{\omega+\mathscr{E}^-_n-i\hat{\eta}}\Bigg\}_{\hat{\eta}\to0^+},\end{aligned}\tag{10}$$

这里 $\mathscr{E}^\pm_n=E_n(N\pm1)-E_0(N)$，算符 $\bar{A}$ 与 B^+ 的表达式见下表：

	$\bar{A}$	B^+
$\bar{G}_{\chi,\kappa}(\omega)$	$\bar{\xi}_\chi$	ζ^+_κ
$\bar{G}_{\kappa,\mu\nu\rho}(\omega)$	$\bar{\xi}_\kappa$	$\zeta^+_\mu\zeta^+_\nu\bar{\xi}_\rho$
$\bar{G}_{\eta\theta\lambda,\chi}(\omega)$	$\zeta^+_\lambda\bar{\xi}_\theta\bar{\xi}_\eta$	ζ^+_χ
$\bar{G}_{\eta\theta\lambda,\mu\nu\rho}(\omega)$	$\zeta^+_\lambda\bar{\xi}_\theta\bar{\xi}_\eta$	$\zeta^+_\mu\zeta^+_\nu\bar{\xi}_\rho$

应用 $\bar{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 可以引进以下单粒位阱

$$\bar{u}_{\alpha\beta}=\bar{M}_{\alpha\beta}(\bar{\varepsilon}_\beta)\ [\text{或}\ \bar{M}_{\alpha\beta}(\bar{\varepsilon}_\alpha)],\tag{11}$$

与之相应的 Schrödinger 方程为

$$\bar{\boldsymbol{h}}|\zeta_\gamma\rangle=(\boldsymbol{t}+\bar{\boldsymbol{u}})|\zeta_\gamma\rangle=\varepsilon_\gamma|\zeta_\gamma\rangle,\tag{12}$$

由于 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 是非厄米的，为了计算方便，和文 [I] 一样，可以引进双正交系 $\{|\zeta_\gamma\rangle,|\bar{\zeta}_\gamma\rangle\}$ 及其产生算符 $\{\zeta^+_\gamma,\bar{\zeta}^+_\gamma\}$．后者和它们的共轭算符 $\{\zeta_\gamma,\bar{\zeta}_\gamma\}$ 所满足的反交换关系见式（I7）．显然，只需将文 [I] 中的 ξ，ε，$v_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ 与 $u_{\alpha\beta}$ 分别换成 ζ，$\bar{\varepsilon}$，$\bar{v}_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ 与 $\bar{u}_{\alpha\beta}$ 就可得到 $\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{H}_0$，$\boldsymbol{V}$ 与 $\bar{\boldsymbol{U}}$ 在 $\{\zeta\}$ 表象中的表达式．

由式(8)与(10)不难看出，不论 ε_γ 是实数还是复数，按式（9）与（7）所分别定义的 $Q(\eta\theta\lambda,\mu\nu\rho;\omega)$ 与 $\bar{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 均有意义．这点对以下的证明无疑是很必要的，因为在证得

$\bar{\varepsilon}_\gamma$ 是实数之前，我们并不知道 $\bar{\varepsilon}_\gamma$ 是实的还是复的.

下面证明，$\bar{\varepsilon}_\gamma$ 必为实数而且满足式(2).

注意到以下交换关系:

$$\left.\begin{aligned}[\boldsymbol{V}, \zeta_\alpha] &= -\frac{1}{2}\sum_{\eta\theta\lambda} \bar{v}_{\alpha\lambda,\eta\theta}\zeta_\lambda^+\zeta_\theta\zeta_\eta \\ [\boldsymbol{V}, \zeta_\beta^+] &= \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\rho} \bar{v}_{\mu\nu,\beta\rho}\zeta_\mu^+\zeta_\nu^+\zeta_\rho\end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

按式(10)有

$$\frac{1}{4}\sum_{\lambda\eta\theta}\sum_{\mu\nu\rho} \bar{v}_{\alpha\lambda,\eta\theta}\bar{G}_{\eta\theta\lambda,\mu\nu\rho}(\omega)\bar{v}_{\mu\nu,\beta\rho}$$
$$= \sum_n \{\Pi_n(+)\langle\Psi_0|[\boldsymbol{V}, \zeta_\alpha]|\Psi_n(N+1)\rangle\langle\Psi_n(N+1)|[\boldsymbol{V}, \zeta_\beta^+]|\Psi_0\rangle$$
$$+ \Pi_n(-)\langle\Psi_0|[\boldsymbol{V}, \zeta_\beta^+]|\Psi_n(N-1)\rangle\langle\Psi_n(N-1)|[\boldsymbol{V}, \zeta_\alpha]|\Psi_0\rangle\}_{\hat{\eta}\to 0^+}, \tag{14}$$

其中 $\Pi_n(\pm) \equiv (\omega \mp \mathscr{E}_n^\pm \pm i\hat{\eta})^{-1}$. 同样,

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda\eta\theta} \bar{v}_{\alpha\lambda,\eta\theta}\bar{G}_{\eta\theta\lambda,\chi}(\omega) = \sum_n\{\Pi_n(+)\langle\Psi_0|[\boldsymbol{V},\zeta_\alpha]|\Psi_n(N+1)\rangle\langle\Psi_n(N+1)|\zeta_\chi^+|\Psi_0\rangle$$
$$+ \Pi_n(-)\langle\Psi_0|\zeta_\chi^+|\Psi_n(N-1)\rangle\langle\Psi_n(N-1)|[\boldsymbol{V}, \zeta_\alpha]|\Psi_0\rangle\}_{\hat{\eta}\to 0^+}, \tag{15-1}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\rho} \bar{G}_{\kappa,\mu\nu\rho}(\omega)\bar{v}_{\mu\nu,\beta\rho} = -\sum_n\{\Pi_n(+)\langle\Psi_0|\zeta_\kappa|\Psi_n(N+1)\rangle\langle\Psi_n(N+1)|[\boldsymbol{V}, \zeta_\beta^+]|\Psi_0\rangle$$
$$+ \Pi_n(-)\langle\Psi_0|[\boldsymbol{V}, \zeta_\beta^+]|\Psi_n(N-1)\rangle\langle\Psi_n(N-1)|\zeta_\kappa|\Psi_0\rangle\}_{\hat{\eta}\to 0^+}. \tag{15-2}$$

显然，$[\boldsymbol{V},\zeta_\alpha]$ 与 $[\boldsymbol{V}, \zeta_\beta^+]$ 也可写为

$$\left.\begin{aligned}[\boldsymbol{V}, \zeta_\alpha] &= [\boldsymbol{H}, \zeta_\alpha] + \bar{\varepsilon}_\alpha\zeta_\alpha - \Sigma_\gamma \bar{u}_{\alpha\gamma}\zeta_\gamma \\ [\boldsymbol{V}, \zeta_\beta^+] &= [\boldsymbol{H}, \zeta_\beta^+] - \bar{\varepsilon}_\beta\zeta_\beta^+ + \Sigma_\delta \bar{u}_{\delta\beta}\zeta_\delta^+\end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

以上式代入式(14)与(15)并注意到，例如,

$$\langle\Psi_n(N+1)|[\boldsymbol{H}, \zeta_\beta^+]|\Psi_0\rangle = \mathscr{E}_n^+\langle\Psi_n(N+1)|\zeta_\beta^+|\Psi_0\rangle$$
$$\Sigma_n|\Psi_n(N\pm1)\rangle\langle\Psi_n(N\pm1)| = I(N\pm1),$$

其中 $I(N\pm1)$ 表示 $(N\pm1)$ 粒子体系的单位算符，通过直接的运算就可以求得

$$\frac{1}{4}\sum_{\lambda\eta\theta}\sum_{\mu\nu\rho} \bar{v}_{\alpha\lambda,\eta\theta}\,Q(\eta\theta\lambda, \mu\nu\rho; \omega)\,\bar{v}_{\mu\nu,\beta\rho}$$
$$= \langle\Psi_0|\{\zeta_\alpha, [\boldsymbol{H}, \zeta_\beta^+]\}|\Psi_0\rangle - \omega\delta_{\alpha\beta} - \bar{G}_{\alpha\beta}^{-1}(\omega)$$
$$= \sum_{\gamma\delta} \bar{v}_{\alpha\gamma,\beta\delta}\bar{\rho}_{\delta\gamma} - (\omega - \bar{\varepsilon}_\beta)\delta_{\alpha\beta} - \bar{u}_{\alpha\beta} - \bar{G}_{\alpha\beta}^{-1}(\omega). \tag{17}$$

由上式与式(7)有

$$\bar{M}_{\alpha\beta}(\omega) = (\omega - \bar{\varepsilon}_\beta)\delta_{\alpha\beta} + \bar{u}_{\alpha\beta} + \bar{G}_{\alpha\beta}^{-1}(\omega), \tag{18}$$

这说明，$\bar{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 在有限域 ($|\omega| < \infty$) 的奇异点完全由 $\bar{G}_{\alpha\beta}^{-1}(\omega)$ 所确定. 令 $\omega = \bar{\varepsilon}_\beta$, 由式(11)与(18)立即可得

$$\bar{G}_{\alpha\beta}^{-1}(\bar{\varepsilon}_\beta) = 0, \tag{19}$$

即按式(11)选择 $\bar{u}$ 相当于使式(12)的本征值 $\bar{\varepsilon}_\beta$ 成为 $\bar{G}_{\alpha\beta}^{-1}(\omega)$ 的根，因此 $\bar{\varepsilon}_\beta$ 一定不是 $\bar{M}_{\alpha\beta}(\omega)$的极点. 注意，式(19)对任一 α 均成立. 另外，按定义有

$$\Sigma_\alpha \bar{G}_{\gamma\alpha}(\omega)\bar{G}^{-1}_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\gamma\beta},$$

上式与式(19)说明，$\bar{\varepsilon}_\beta$ 至少必为某一 $\bar{G}_{\beta\alpha}(\omega)$ 的奇异点．由式(10)我们看到，对于断续谱区，$\bar{G}_{\beta\alpha}(\omega)$ 的奇异点必为其极点，由此按判据 B，$\bar{\varepsilon}_\beta$ 一定满足式(2)，因而也一定是实数．当 $\bar{\varepsilon}_\beta$ 是实数时，$\bar{G}^0_{\alpha\beta}(\omega)$ 显然存在． Ethofer 与 Schuck[4] 曾证明，这时

$$Q(\eta\theta\lambda,\mu\nu\rho;\omega)=\bar{G}_{ir}(\eta\theta\lambda,\mu\nu\rho;\omega).$$

因此按式 (II 10)，$\bar{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 就是质量算符，即它上面增添的一横是多余的，由式(11)定义的 $\bar{u}_{\alpha\beta}$ 与式(3)中的 $u_{\alpha\beta}$ 全同，式(12)的本征解 $\{\bar{\varepsilon}_\gamma,|\zeta_\gamma\rangle\}$ 全等于以式(3)代入式(1)所求得的本征解 $\{\varepsilon_\gamma,|\gamma\rangle\}$，结论 A 因而证毕．

根据上述结果，本节新引进的符号已是不必要的，因此下面将仍使用原来的符号．

当 $G^0_{\alpha\beta}(\omega)$ 存在时，由式 (II 14) 我们看到，式(18)右端第一项就等于 $-G^{0-1}_{\alpha\beta}(\omega)$，即式(18)也可写如下形：

$$M_{\alpha\beta}(\omega)=-G^{0-1}_{\alpha\beta}(\omega)+u_{\alpha\beta}+G^{-1}_{\alpha\beta}(\omega),\tag{18*}$$

由此可以立即求得

$$G_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}G^0_\alpha(\omega)+\Sigma_\gamma G^0_\alpha(\omega)[u-M(\omega)]_{\alpha\gamma}G_{\gamma\beta}(\omega)$$

这就是 Dyson 方程，同时这也说明，按式(7)定义的 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 为质量算符．反之，由 Dyson 方程可以立即导得式 (18)．本节开始时已提到，我们没有这样做的原因在于这需要事先假定 $G^0_{\alpha\beta}(\omega)$存在．显然，式(18)还指出，如果 $G^{-1}_{\alpha\beta}(\omega)$存在，则 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 存在；反之亦然．

由于按式(3)定义的 $\boldsymbol{u}$ 不含任意参数，而 $E_0(N)$ 与 $E_n(N\pm1)$ 已有大量的实验数据，因此根据式(2)通过计算 $\boldsymbol{u}$ 的本征谱可以对核力的选择提供一个可靠的依据．此外，令 $\Theta^\pm_0=E_{n_0}(N\pm1)-E_0(N)$．很明显，$\Theta^\pm_0$ 是满壳结构稳定性的一个标志．因为式(2)严格成立，所以在对核力的选择作了可靠的判断后，应用式 (3) 的位阱对超重核区进行的计算结果将可对稳定岛的存在区域提供一个有力的判据． 自然也可能出现这样的情况，即在二体核力的基础上计算结果和实验值总有一定的偏差，这将说明多体力或介子自由度是不可忽略的． 考虑介子自由度以及多体力的影响是我们准备进一步研究的一个课题．

注意，因为不需要假定 $G^0_{\alpha\beta}(\omega)$ 存在就可由式(7)导得式(18)，所以当取式(7)为质量算符的定义时还可推广 Dyson 方程．设 $\boldsymbol{u}$ 为某一单粒位阱，其本征值 ε_α 可以是复数．引进 $\hat{G}^0_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}\hat{G}^0_\alpha(\omega)$，其中

$$\hat{G}^0_\alpha(\omega)=-\left\{\frac{1-n_\alpha}{\omega-\varepsilon_\alpha+i\hat{\eta}}+\frac{n_\alpha}{\omega-\varepsilon_\alpha-i\hat{\eta}}\right\}_{\hat{\eta}\to0^+}\tag{II 14*}$$

上式对实数或复数的 ε_α 均有意义，如果 $\mathrm{Im}\varepsilon_\alpha\neq0$，则可取 $\hat{\eta}=0$．显然，式 (18) 右端第一项可写为 $-\hat{G}^{0-1}_{\alpha\beta}(\omega)$，由此有

$$G_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}\hat{G}^0_\alpha(\omega)+\sum_\gamma\hat{G}^0_\alpha(\omega)[u-M(\omega)]_{\alpha\gamma}G_{\gamma\beta}(\omega),$$

上式对不满足条件 $\mathrm{Im}\varepsilon_p\leqslant0$ 与 $\mathrm{Im}\varepsilon_h\geqslant0$ 的 ε_α 也成立． 如果 ε_α 满足这个条件，则 $\hat{G}^0_{\alpha\beta}(\omega)=G^0_{\alpha\beta}(\omega)$，因此上式就是平常的 Dyson 方程．当 ε_α 不满足上述条件时，$G^0_{\alpha\beta}(\omega)$ 不存在，但是 $\hat{G}^0_{\alpha\beta}(\omega)$ 却仍有意义而且 $\hat{G}^0_{\alpha\beta}(t)\neq G^0_{\alpha\beta}(t)$．容易求得，倘若 $\mathrm{Im}\varepsilon_p>0$，则

$$\hat{G}^0_p(t>0)=0,\quad \hat{G}^0_p(t<0)=-e^{-i\varepsilon_p t}$$

即这时粒子线是反向传播的 ($t<0$) 而且含有衰减因子 $\exp[(\mathrm{Im}\varepsilon_p)t]$；又当 $\mathrm{Im}\varepsilon_h<0$ 时,有

$$\hat{G}_h^0(t>0)=e^{-i\varepsilon_h t},\quad \hat{G}_h^0(t<0)=0$$

即现在空穴线是正向传播的 ($t>0$)，其衰减因子为 $\exp[(\mathrm{Im}\varepsilon_h)t]$. 以上结果和折线图理论[5]相似,只是由于 ε_α 是复的,这里还有阻尼效应. 很明显,上述推广数学上是允许的,物理上也不违背任何基本原理;自然它的实际应用还有待进一步的探讨.

三、判据 A 与振幅 $A_{\alpha\alpha'}$ 的计算方法

显然,如果 ε_γ 是复数,则判据 A 的条件必不满足,因此没有必要再进行计算. 所以,本节虽将允许单粒位阱 u 是非厄米的，但要求其本征值 ε_γ 是实的. 例如,上一节已证明,式(3)中的非厄米位阱就满足这一要求.

注意，求得了 ε_γ 后，要想知道它是否满足式(2)，可以将它和 $\pm[E_{n_\gamma}(N\pm1)-E_0(N)]$ 的实验值进行比较(比较结果将用 $\Delta_{实}$ 表示,例如，$\Delta_{实}$ 可理解为相对误差或绝对误差),由此理论上再提出这一问题似乎没有什么意义. 其实不然,因为

(1) 如果理论上不知道式(2)是否成立,则 $\Delta_{实}$ 的确切物理含意是不清楚的,而且倘若式(2)严格成立,则理论上还可对尚没有实验资料的核区作出可靠的预言;

(2) 上一节已提到,由于核力迄今仍不完全清楚,因此倘若 u 依赖于核力而且式(2)成立,则 $\Delta_{实}$ 将可对核力的选择提供一个依据. 此外,因为判据 A 中的量不仅和 u 有关而且和核力有关,所以即使 u 为一唯象位阱,它和核力没有直接关系,通过判据 A 的计算也可能了解到它和什么样的核力有关;

(3) 倘若式(2)成立,则例如,按式(I 39)有

$$\left.\begin{aligned} G_{pp}(t>0)&=[1-\mathscr{M}'_{pp}(\varepsilon_p)]\,e^{-i\varepsilon_p t}+P_{pp},\\ G_{p'p}(t>0)&=\mathscr{M}_{p'p}(\varepsilon_{p'})\,G_p^0(\varepsilon_{p'})\,e^{-i\varepsilon_{p'}t}\\ &\quad+\mathscr{M}_{p'p}(\varepsilon_p)\,G_{p'}^0(\varepsilon_p)\,e^{-i\varepsilon_p t}+P_{p'p}\,(p'\neq p)\end{aligned}\right\}\tag{I 39}$$

这说明，计算判据 A 中的量与计算单粒格林函数 $G_{\alpha\beta}(t)$ 中 $\exp(-i\varepsilon_\alpha t)$ 与 $\exp(-i\varepsilon_\beta t)$ 的振幅(或 $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 中极点 ε_α 与 ε_β 的留数)是同一个问题. 同样,对于式(3)中的单粒位阱,虽然已知它的本征值一定满足式(2),但是由式(4)与(5)我们看到,要想求得振幅 $A_{\alpha\alpha'}$ 就相当于仍需要计算判据 A 中的量.

下面将先讨论不按式(3)选择的单粒位阱,然后再讨论式(3)中的位阱.

我们知道,可约质量算符 $\mathscr{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 满足以下积分方程

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{\alpha\beta}(\omega)&=[u-M(\omega)]_{\alpha\beta}+\sum_\gamma[u-M(\omega)]_{\alpha\gamma}\,G_\gamma^0(\omega)\,\mathscr{M}_{\gamma\beta}(\omega)\\ &=[u-M(\omega)]_{\alpha\beta}+\sum_\gamma\mathscr{M}_{\alpha\gamma}(\omega)\,G_\gamma^0(\omega)\,[u-M(\omega)]_{\gamma\beta}.\end{aligned}\tag{20}$$

此外,按式(I 21)，ε_α 与 ε_β 必为 $\mathscr{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 的有理点而且

$$\mathscr{M}_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)=0.\tag{21}$$

根据上式有

$$\lim_{\omega\to\varepsilon_\alpha}[\mathscr{M}_{\alpha\alpha}(\omega)\,G_\alpha^0(\omega)]=-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha),\tag{22}$$

以 ε_α 代入式(20)立即可得

$$(1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha))[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\alpha\alpha}+\sum_{\gamma\neq\alpha}\mathscr{M}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)G^0_\gamma(\varepsilon_\alpha)[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\gamma\alpha}=0, \quad (23\text{-}1)$$

$$(1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha))[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma\neq\alpha}\mathscr{M}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)\{G^0_\gamma(\varepsilon_\alpha)[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\gamma\beta}-\delta_{\gamma\beta}\}=0 \quad (\alpha\neq\beta). \quad (23\text{-}2)$$

式(23)为一齐次线性代数方程组，未知量 $1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)$ 与 $\mathscr{M}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)$ $[\gamma\neq\alpha]$ 就是判据 A 中所需求的量. 令 D_α 表示上述方程组中由这些未知量的系数所构成的行列式. 倘若 $D_\alpha\neq 0$，则必有

$$1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)=0, \quad \mathscr{M}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)=0. \quad (24)$$

如果 $D_\alpha=0$，则式(23)可以有非零解. 令

$$x_{\alpha\gamma}=\mathscr{M}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)/(1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha))(\gamma\neq\alpha), \quad (25)$$

按式 (23-2)，$x_{\alpha\gamma}$ 可由以下非齐次线性代数方程组

$$\sum_{\gamma\neq\alpha}x_{\alpha\gamma}\{G^0_\gamma(\varepsilon_\alpha)[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\gamma\beta}-\delta_{\gamma\beta}\}+[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\alpha\beta}=0\,(\alpha\neq\beta) \quad (26)$$

确定. 因 $D_\alpha=0$，由式(26)求得的 $x_{\alpha\gamma}$ 必满足式(23-1)。显然，$1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)$ 仍是未知的. 另外，由于式(24)恒可以是式 (23) 的解，因此要想说明，当 $D_\alpha=0$ 时 ε_α 必满足式 (2) 也还需要作一些进一步的论证. 让我们先考虑后一问题. 为此，可仿照文 [II] 引进 $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\omega)$. 根据式 (II 29) 有

$$\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\omega)=[1-\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\omega)G^0_\alpha(\omega)]\mathscr{M}_{\alpha\beta}(\omega), \quad (27)$$

以 $[1-\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\omega)G^0_\alpha(\omega)]$ 乘式(20)的两边，由式(27)我们看到，$\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\omega)(\alpha\neq\beta)$ 满足以下积分方程

$$\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\omega)=[u-M(\omega)]_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma\neq\alpha}\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\gamma}(\omega)G^0_\gamma(\omega)[u-M(\omega)]_{\gamma\beta}(\alpha\neq\beta), \quad (28\text{-}1)$$

而在求得了 $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\omega)$ 后，可由下式

$$\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\omega)=[u-M(\omega)]_{\alpha\alpha}+\sum_{\gamma\neq\alpha}\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\gamma}(\omega)G^0_\gamma(\omega)[u-M(\omega)]_{\gamma\alpha}, \quad (28\text{-}2)$$

立即算出 $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\omega)$. 很明显，式(28-1)比式(20)更简单. 以 ε_α 代入式(28)有

$$\sum_{\gamma\neq\alpha}\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)\{G^0_\gamma(\varepsilon_\alpha)[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\gamma\beta}-\delta_{\gamma\beta}\} + [u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\alpha\beta}=0\ (\alpha\neq\beta), \quad (29\text{-}1)$$

$$\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)=[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\alpha\alpha} + \sum_{\gamma\neq\alpha}\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)G^0_\gamma(\varepsilon_\alpha)[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\gamma\alpha}. \quad (29\text{-}2)$$

注意，式(29-1)与式(26)完全相同. 对比式(29)与(23)不难看出，当 $D_\alpha=0$ 时，必有

$$\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)=0. \quad (30)$$

因为前面已提到，这时倘若以式 (29-1) 的解代入式(29-2)，则式(29-2)的右端必等于零. 现让我们讨论一下式(30)的含意. 由式 (27) 与 (I 21) 有

$$\mathscr{M}_{\alpha\alpha}(\omega)=\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\omega)\,G_{\alpha\alpha}(\omega)\,G_{\alpha}^{0}(\omega)^{-1}$$
$$=G_{\alpha}^{0}(\omega)^{-1}G_{\alpha\alpha}(\omega)G_{\alpha}^{0}(\omega)^{-1}-G_{\alpha}^{0}(\omega)^{-1},\tag{31}$$

由上式容易求得,倘若 $\omega=\varepsilon_\alpha$ 不是 $G_{\alpha\alpha}(\omega)$ 的极点,则

$$\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)\,G_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)=-1,\tag{32}$$

即这时 $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)$ 必不等于零而且其值有限除非 ε_α 恰巧为 $G_{\alpha\alpha}(\omega)$ 的根. 反之, 如果 ε_α 是 $G_{\alpha\alpha}(\omega)$ 的极点,则按式(10) $G_{\alpha\alpha}(\omega)$ 可以写为

$$G_{\alpha\alpha}(\omega)=g_{\alpha\alpha}G_{\alpha}^{0}(\omega)+R_{\alpha\alpha}(\omega),\tag{33-1}$$

其中 $g_{\alpha\alpha}\neq 0$, $R_{\alpha\alpha}(\omega)$ 表示 $G_{\alpha\alpha}(\omega)$ 中不含极点 ε_α 的部分. 由式(31)与(33-1)可以立即看出,当 $g_{\alpha\alpha}\neq 0$ 时, $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)$ 必等于零. 因此,关于 ε_α 是否满足式(2)我们又有以下判据:

如果 $D_\alpha=0$, 则 ε_α 必为 $G_{\alpha\alpha}(\omega)$ 的极点,因此必满足式(2).

下面让我们考虑,当 $D_\alpha=0$ 时如何求 $1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)$. 因为这时 ε_α 必满足式(2), 根据式(10)可将 $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 一般地写如下形:

$$G_{\alpha\beta}(\omega)=g_{\alpha\beta}\,G_{\alpha}^{0}(\omega)+R_{\alpha\beta}(\omega),\tag{33-2}$$

虽然上式中 $g_{\alpha\alpha}\neq 0$, 但是当 $\alpha\neq\beta$ 时, $g_{\alpha\beta}$ 可以等于零,所以式(33-2)并不隐含着 ε_α 也一定是 $G_{\alpha\beta}(\omega)\,(\alpha\neq\beta)$ 的极点. 按式(27)与(I 21)容易求得

$$\left.\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha}&=1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)=[1+\overleftarrow{\mathscr{M}}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)]^{-1}\\
g_{\alpha\beta}&=\mathscr{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)\,G_{\beta}^{0}(\varepsilon_\alpha)\\
&=[1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)]\,\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)\,G_{\beta}^{0}(\varepsilon_\alpha)\quad(\alpha\neq\beta)
\end{aligned}\right\}.\tag{34}$$

这说明,式(25)中的 $x_{\alpha\beta}(\alpha\neq\beta)$ 等于 $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)$ 而且

$$g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\alpha}x_{\alpha\beta}\,G_{\beta}^{0}(\varepsilon_\alpha)\quad(\alpha\neq\beta).\tag{35}$$

显然,我们也可试图应用 Dyson 方程来直接求 $g_{\alpha\beta}$. 以式(33)代入以下 Dyson 方程

$$G_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}\,G_{\alpha}^{0}(\omega)+\sum_{\gamma}G_{\alpha\gamma}(\omega)\,[u-M(\omega)]_{\gamma\beta}\,G_{\beta}^{0}(\omega),\tag{36}$$

有

$$\sum_{\gamma}g_{\alpha\gamma}\,[u_{\gamma\alpha}-M_{\gamma\alpha}(\varepsilon_\alpha)]=0,$$

$$\sum_{\gamma}g_{\alpha\gamma}\,\{[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\gamma\beta}\,G_{\beta}^{0}(\varepsilon_\alpha)-\delta_{\gamma\beta}\}=0\,(\alpha\neq\beta).$$

由式(34)我们看到,正如所预期的那样,上式与式(23)完全相同.因此,除非 $u_{\alpha\beta}$ 具有某些特殊性质(见后), 否则为了求 $g_{\alpha\alpha}$ 必须考虑 $\mathscr{M}'_{\alpha\beta}(\omega)$. 为此可以应用式(28). 这不仅由于式(28)比式(20)简单, 更重要的是因为式(28)右端不含 $\gamma=\alpha$ 的项. 由式(27)与(I 21)不难看出, ε_α 同样是 $\overleftarrow{\mathscr{M}}'_{\alpha\beta}(\omega)$ 的有理点. 根据式(28)容易求得

$$\sum_{\gamma\neq\alpha}\overleftarrow{\mathscr{M}}'_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)\,\{G_{\gamma}^{0}(\varepsilon_\alpha)\,[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\gamma\beta}-\delta_{\gamma\beta}\}=f_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)\quad(\alpha\neq\beta),\tag{37-1}$$

其中

$$f_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)=M'_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)$$
$$+\sum_{\gamma\neq\alpha}\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)\,G_{\gamma}^{0}(\varepsilon_\alpha)\,\{M'_{\gamma\beta}(\varepsilon_\alpha)-G_{\gamma}^{0}(\varepsilon_\alpha)\,[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\gamma\beta}\}.\tag{38}$$

由式（29-1）求得了 $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)$ 后，以之代入式（38）就可算出 $f_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)$，因此为了求 $\overleftarrow{\mathscr{M}}'_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)$ 也只需解一组非齐次线性代数方程．实际上式(37-1)与(29-1)的区别只在于它们的非齐次项不同．求解了式(37-1)后，以其解代入下式

$$\overleftarrow{\mathscr{M}}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)=-f_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)+\sum_{\gamma\neq\alpha}\overleftarrow{\mathscr{M}}'_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)\,G^0_\gamma(\varepsilon_\alpha)\,[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\gamma\alpha},\tag{37-2}$$

便可算出 $\overleftarrow{\mathscr{M}}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)$，再由式(34)就可求得 $g_{\alpha\alpha}$．

很明显，以上步骤同样适用于求 $\mathscr{M}_{\beta\alpha}(\varepsilon_\alpha)$．例如，对应于式(23)有

$$[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\alpha\alpha}(1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha))+\sum_{\gamma\neq\alpha}[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\alpha\gamma}\,G^0_\gamma(\varepsilon_\alpha)\,\mathscr{M}_{\gamma\alpha}(\varepsilon_\alpha)=0,\tag{39-1}$$

$$[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\beta\alpha}(1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha))+\sum_{\gamma\neq\alpha}\{[u-M(\varepsilon_\alpha)]_{\beta\gamma}\,G^0_\gamma(\varepsilon_\alpha)-\delta_{\beta\gamma}\}\,\mathscr{M}_{\gamma\alpha}(\varepsilon_\alpha)=0\ (\beta\neq\alpha).\tag{39-2}$$

令 $\hat{D}_\alpha$ 表示上式中由 $1-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)$ 与 $\mathscr{M}_{\gamma\alpha}(\varepsilon_\alpha)$ $(\gamma\neq\alpha)$ 的系数所构成的行列式．不难看出，$\hat{D}_\alpha=D_\alpha$．此外，对应于 $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\omega)$ 可以引进 $\mathscr{M}_{\alpha\vec{\beta}}(\omega)$，后者与 $\mathscr{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 有以下关系：

$$\mathscr{M}_{\alpha\beta}(\omega)\,[1-G^0_\beta(\omega)\,\mathscr{M}_{\beta\vec{\beta}}(\omega)]=\mathscr{M}_{\alpha\vec{\beta}}(\omega).\tag{40}$$

容易求得，$\mathscr{M}_{\alpha\vec{\beta}}(\omega)\ (\alpha\neq\beta)$ 所满足的积分方程为

$$\mathscr{M}_{\alpha\vec{\beta}}(\omega)=[u-M(\omega)]_{\alpha\beta}+\sum_{\gamma\neq\beta}[u-M(\omega)]_{\alpha\gamma}\,G^0_\gamma(\omega)\,\mathscr{M}_{\gamma\vec{\beta}}(\omega)\ (\alpha\neq\beta),\tag{41-1}$$

而且

$$\mathscr{M}_{\beta\vec{\beta}}(\omega)=[u-M(\omega)]_{\beta\beta}+\sum_{\gamma\neq\beta}[u-M(\omega)]_{\beta\gamma}\,G^0_\gamma(\omega)\,\mathscr{M}_{\gamma\vec{\beta}}(\omega),\tag{41-2}$$

由于其它的讨论和求 $\mathscr{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)$ 完全相同，这里就不多叙了．

现让我们考虑式(3)中的 $\boldsymbol{u}$．这时问题显得特别简单，因为不需要考虑 $\mathscr{M}'_{\alpha\beta}(\omega)$ 就可以求出全部 $g_{\alpha\beta}$．由式(3)我们看到，式(23-1)中的系数全都等于零，因此 $D_\alpha=0$．此外，根据式(29-2)，这时 $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)$ 的确也等于零，所以 $g_{\alpha\alpha}\neq0$．以式(33)代入式(36)可得

$$g_{\alpha\alpha}=1+\sum_\gamma g_{\alpha\gamma}\,M'_{\gamma\alpha}(\varepsilon_\alpha),\tag{42}$$

由此，求解了式(26)后，以 $x_{\alpha\gamma}(\alpha\neq\gamma)$ 代入上式就有

$$g_{\alpha\alpha}=\left[1-M'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)-\sum_{\gamma\neq\alpha}x_{\alpha\gamma}\,G^0_\gamma(\varepsilon_\alpha)\,M'_{\gamma\alpha}(\varepsilon_\alpha)\right]^{-1}.\tag{43}$$

另外，如果称

$$\mathscr{F}_{\alpha\beta}(\omega)=\mathscr{M}_{\alpha\beta}(\omega)\,G^0_\beta(\omega),\quad B_{\alpha\beta}(\omega)=[u-M(\omega)]_{\alpha\beta}\,G^0_\beta(\omega),$$

并注意到

$$\mathscr{F}_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)=-\mathscr{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)=g_{\alpha\alpha}-1,\quad B_{\beta\alpha}(\varepsilon_\alpha)=M'_{\beta\alpha}(\varepsilon_\alpha)$$

则式(26)与(42)也可联立写为

$$\sum_{\gamma} \mathscr{F}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\alpha)\,[\delta_{\gamma\beta} - B_{\gamma\beta}(\varepsilon_\alpha)] = B_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha). \tag{44}$$

显然,上式也就是直接由式(20)所导得的结果.

由以上讨论我们看到,为了判断某一单粒位阱 $\boldsymbol{u}$ 是否满足判据 A 中的条件只需要计算行列式 D_α. 如果 $D_\alpha \neq 0$, 则它必不满足判据 A 中的条件. 如果 $D_\alpha = 0$, 则它的本征值 ε_α 不仅必满足式(2)而且一定是 $G_{\alpha\alpha}(\omega)$ 的极点,即 $g_{\alpha\alpha}$ 必不等于零,因此它一定满足判据 A 中的条件. 这时,为了求判据 A 中的量或单粒格林函数的有关振幅将只需要求解简单的线性代数方程组. 在推导过程中我们还较仔细地讨论了 $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\omega)$ [或 $\mathscr{M}^{\rightarrow}_{\alpha\beta}(\omega)$]的作用. 式(28)指出,当有必要求解积分方程时,引进 $\overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\omega)$[或 $\mathscr{M}^{\rightarrow}_{\alpha\beta}(\omega)$]将同样可使问题得到简化.

最后让我们举一个简单的例子. 设式(II 10)中只有第一项重要,即

$$M_{\alpha\beta}(\omega) \simeq \sum_{\gamma\delta} v_{\alpha\gamma,\beta\delta}\,\hat{\rho}_{\delta\gamma} \tag{45-1}$$

是一个好的近似. 如果相应地选

$$u_{\alpha\beta} \simeq \sum_{\gamma\delta} v_{\alpha\gamma,\beta\delta}\,\hat{\rho}_{\delta\gamma}, \tag{45-2}$$

则由式(23)我们看到,在上述近似下依然有 $D_\alpha = 0$. 此外,由式(23-2)与(29-1)可得

$$\mathscr{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha) = \overleftarrow{\mathscr{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha) = g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

因为在式(45-1)的近似下, $M'_{\alpha\beta}(\omega) = 0$, 所以由式(37)与(38)还有 $\overleftarrow{\mathscr{M}}'_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha) = 0$. 由此根据式(34)立即得到

$$g_{\alpha\alpha} = 1.$$

注意,由于式(45)的近似满足式(3),因此式(43)也适用. 很明显,应用式(43)所求得的结果与上式完全相同. 综上所述我们有: 倘若式(45)是一个好的近似,则

$$\varepsilon_\alpha \simeq \pm\,[E_{n_\alpha}(N\pm 1) - E_0(N)], \tag{46-1}$$

而且

$$g_{\alpha\alpha} = 1, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{46-2}$$

上式说明,虽然式(45)中考虑了填充数修正,它将会对 ε_α 值产生影响,但是要想顾及单粒格林函数的振幅修正就还必须考虑式(II 10)中和 ω 有关的项. 式(46)并不含有多少新的内容. 通过这个举例只是说明,根据本节所建议的方法的确可以简便地导得它们. 此外,我们看到,只要 $\boldsymbol{u}$ 满足式(3)而且所选 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的近似于点 $\omega = \varepsilon_\beta$ 是有理的,那么式(2)就近似成立. 自然,如果 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的近似选择的愈好,则 ε_α 将愈逼近于 $\pm [E_{n_\alpha}(N\pm 1) - E_0(N)]$ 的严格值.

四、讨　论

我们看到,按式(3)选择的单粒位阱不仅具有迄今所知最佳的抵销性而且可使单粒格林函数简化,此外它的本征值严格满足式(2). 后者显然也是它具有十分好的抵销性的一个标志. 大家熟知,如何准确地计算单粒格林函数并使其表达式尽量简化并不是一个孤

立的问题．当重整化效应不可忽略时，它实际是如何简化多体问题计算的关键性课题之一．倘若 ε_γ 不满足式(2),则它一定不是 $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 的极点，因此 $G_{\alpha\beta}(t)$ 中也一定不含和 $\exp(-i\varepsilon_\gamma t)$ 成比例的项．当 ε_γ 满足式(2)时，文 [I] 曾对单粒格林函数中的余项 $P_{\alpha\beta}$ 进行过估计．对于式(3)中的位阱，例如式(4)还可进一步简化为

$$\left.\begin{aligned} G_{pp'}(t>0) &\simeq A_{pp'}\exp(-i\varepsilon_p t) \\ G_{hh'}(t<0) &\simeq -A_{hh'}\exp(-i\varepsilon_h t) \end{aligned}\right\}, \tag{47}$$

这无疑是一个很理想的结果,特别是第三节曾指出,式(3)的位阱可使 $A_{\alpha\alpha'}$ 的计算比其它位阱更简单．注意，文 [I] 的估计中曾作了以下假定：(1) $\langle\Psi_{n_p}(N+1)|\xi_p^+|\Psi_0\rangle$ 与 $\langle\Psi_0|\xi_h^+|\Psi_{n_h}(N-1)\rangle$ 等不等于零,(2)$(N\pm1)$体系的严格本征解不含偶然退化,(3) C_α 与 $\bar{C}_\alpha$ 等 $\ll 1$, 其中例如

$$\begin{aligned} C_p &= |\langle\Psi_{n_c}(N+1)|\xi_p^+|\Psi_0\rangle/\langle\Psi_{n_p}(N+1)|\xi_p^+|\Psi_0\rangle|, \\ \bar{C}_p &= |\langle\Psi_0|\xi_p|\Psi_{n_c}(N+1)\rangle/\langle\Psi_0|\xi_p|\Psi_{n_p}(N+1)\rangle| \end{aligned}$$

上式中 $\Psi_{n_c}(N\pm1)$ 表示集体运动态．第三节已证明，对于式(3)中的位阱，$g_{\alpha\alpha}$ 必不等于零，因此假定(1)一定成立．对于假定(2)我们知道，倘若存在偶然退化,则可以在核力中恰当地引进一个和参量 λ 成比例的项以使退化消除，然后再考虑 $\lambda\to0$ 的极限，从而挑选出 $\Psi_{n_p}(N+1)$ 与 $\Psi_{n_h}(N-1)$．因此只有假定(3)真正是一个估计．虽然式(46)的可靠性仍有待通过具体的计算加以检验,但是因为 $\Psi_{n_c}(N\pm1)$ 是集体运动态，我们认为假定(3)中的估计是合理的,即可以预期式(46)的确有效,所以这将是式(3)中位阱又一值得注意的优点．位阱(3)唯一明显的缺点是它的非厄米性．显然,这并不是一个原则性的问题，特别是前面已证明了它的本征值一定是实数．至于它的本征函数仍可以互不正交,文 [I] 已指出，由此所带来的计算上的困难可以通过引进双正交系而得到克服． 因此,我们认为式(3)中的位阱是一个好的选择． 为了求解式(1)可采用自洽方法．只要 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的近似选择恰当,可以保证自洽计算每一步所求得的本征值都是实的．例如,设所选初始解为 HF 近似解 $\{\varepsilon_a,|a\rangle\}$，所选 $G_{ir}(\eta\theta\lambda,\mu\nu\rho;\omega)$ 的近似为其无规位相近似 (RPA)． 令 $\{\hat{\varepsilon}_\alpha,|\hat{\alpha}\rangle\}$ 表示自洽计算第一步所求得的本征解．不难看出，由于确定 $\{\hat{\varepsilon}_\alpha,|\hat{\alpha}\rangle\}$ 的本征方程属于以下类型

$$\boldsymbol{h}(\hat{\varepsilon}_\alpha)|\hat{\alpha}\rangle=\hat{\varepsilon}_\alpha|\hat{\alpha}\rangle, \tag{48}$$

其中哈密顿量 $\boldsymbol{h}$ 为本征值 $\hat{\varepsilon}_\alpha$ 的函数,因此 $|\hat{\alpha}\rangle$ 一般互不正交[5];然而，$\hat{\varepsilon}_\alpha$ 满足下式

$$\begin{aligned} \langle\hat{\alpha}|\hat{\alpha}\rangle\hat{\varepsilon}_\alpha=\langle\hat{\alpha}|\boldsymbol{t}|\hat{\alpha}\rangle&+\sum_{ab}v_{\hat{\alpha}a,\hat{\alpha}b}\,\hat{\rho}_{ba} \\ &+\frac{1}{4}\sum_n\left\{\frac{|A_n(\hat{\alpha})|^2}{\hat{\varepsilon}_\alpha-\mathscr{E}_n^+}+\frac{|B_n(\hat{\alpha})|^2}{\hat{\varepsilon}_\alpha+\mathscr{E}_n^-}\right\}, \end{aligned} \tag{49}$$

其中 $\mathscr{E}_n^\pm$ 为由 RPA 本征方程所求得的本征值，这里我们将假定 RPA 解是稳定的，即 $\mathscr{E}_n^\pm$ 均为实数,另外在 HF 近似下 $\hat{\rho}_{ba}=n_a\delta_{ab}$. 如果 $\hat{\varepsilon}_\alpha=x_\alpha+iy_\alpha$，则由式(49)有

$$\begin{aligned} \Bigg\{\langle\hat{\alpha}|\hat{\alpha}\rangle+\frac{1}{4}\sum_n\Bigg[&\frac{|A_n(\hat{\alpha})|^2}{(x_\alpha-\mathscr{E}_n^+)^2+y_\alpha^2} \\ &+\frac{|B_n(\hat{\alpha})|^2}{(x_\alpha+\mathscr{E}_n^-)^2+y_\alpha^2}\Bigg]\Bigg\}\,y_\alpha=0, \end{aligned} \tag{50}$$

上式说明 $y_\alpha=0$，即 $\hat{\varepsilon}_\alpha$ 必为实数．注意，即使对实数的 $\hat{\varepsilon}_\alpha$，$\boldsymbol{h}(\hat{\varepsilon}_\alpha)$ 为厄米的，式(48)的本征值仍可能是复数，因此以上证明是必要的．同样可以证明，由以后各步所求得的本征值将均为实数．更详细的讨论以及数值计算结果将在另一文中阐述，这里就不多写了．此外我们还看到，式(3)中位阱是非厄米的主要原因就在于，倘若以式(3)代入式(1)，则所需求解的本征方程是属于式(48)型的，因此它的本征函数可以互不正交．事实上，如果 $\langle\alpha|\beta\rangle=0\ (\alpha\neq\beta)$，则由式(1)有

$$\langle\alpha|\boldsymbol{t}|\beta\rangle+M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)=0\quad(\alpha\neq\beta),$$

因而

$$M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)^*=-\langle\alpha|\boldsymbol{t}|\beta\rangle^*=-\langle\beta|\boldsymbol{t}|\alpha\rangle=M_{\beta\alpha}(\varepsilon_\alpha).$$

但是，当 $\langle\alpha|\beta\rangle\neq0$ 时，显然以上二式均不成立，即式(3)中的 $u_{\alpha\beta}$ 不是厄米的．

校稿时增加的注记1)

——介子自由度

注意，通过以下途径也可容易地看出，即使式(1)的本征值 ε_γ 为复数，质量算符 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 仍满足式(18)．因为

$$[\boldsymbol{H},\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha(t)]=e^{iHt}[\boldsymbol{H},\bar{\xi}_\alpha]\,e^{-iHt}=-\varepsilon_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha(t)+\sum_\gamma u_{\alpha\gamma}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\gamma(t)-\boldsymbol{V}_\alpha(t),\tag{A-1}$$

其中

$$\boldsymbol{V}_\alpha(t)=e^{iHt}[\bar{\xi}_\alpha,\ \boldsymbol{V}]\,e^{-iHt},\tag{A-2}$$

所以不论 ε_α 是实数还是复数，下式

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}-\varepsilon_\alpha\right)G_{\alpha\beta}(t_1-t_2)=i\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(t_1-t_2)$$
$$-\sum_\gamma u_{\alpha\gamma}\,G_{\gamma\beta}(t_1-t_2)+G(V_\alpha,\beta;\,t_1-t_2)\tag{A-3}$$

均成立．上式中 $G(V_\alpha,\beta;\,t_1-t_2)$ 的表达式如下：

$$G(V_\alpha,\beta;\,t_1-t_2)=\langle\Psi_0|\,T\,\{\boldsymbol{V}_\alpha(t_1)\,\boldsymbol{\xi}^\dagger_\beta(t_2)\}\,|\Psi_0\rangle,\tag{A-4}$$

根据质量算符的定义[6]有

$$i\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma\sum_\gamma M_{\alpha\gamma}(t_1-\sigma)\,G_{\gamma\beta}(\sigma-t_2)=G(V_\alpha,\beta;\,t_1-t_2),\tag{A-5}$$

求式(A-3)与(A-5)的傅氏变换可得

$$G(V_\alpha,\beta;\,\omega)=\delta_{\alpha\beta}+(\omega-\varepsilon_\alpha)G_{\alpha\beta}(\omega)+\sum_\gamma u_{\alpha\gamma}\,G_{\gamma\beta}(\omega),\tag{A-6a}$$

$$=\sum_\gamma M_{\alpha\gamma}(\omega)\,G_{\gamma\beta}(\omega).\tag{A-6b}$$

上式说明，如果 $G^{-1}_{\alpha\beta}(\omega)$ 存在，则 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 存在(反之亦然)且满足以下关系：

1) 本注记 1978 年 5 月 19 日收到．

$$M_{\alpha\beta}(\omega) = (\omega - \varepsilon_\alpha)\delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta} + G^{-1}_{\alpha\beta}(\omega)$$

这就是式(18). 很明显,式 (A-6a) 也可按第二节所述方法由式(10)与(16)导得. 另外我们注意,下述微分方程

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1} - \varepsilon_\alpha\right) K_{\alpha\beta}(t_1 - t_2) = i\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(t_1 - t_2) \tag{A-7}$$

的解不仅可写为

$$\begin{aligned} G^0_{\alpha\beta}(t_1 - t_2) &= \langle \bar{\phi}_0 | T\{\xi_\alpha(t_1)\,\xi^+_\beta(t_2)\} | \phi_0 \rangle \\ &= \delta_{\alpha\beta}\,[\theta(t_1 - t_2) - n_\alpha]\, e^{-i\varepsilon_\alpha(t_1 - t_2)} \equiv \delta_{\alpha\beta}\, G^0_\alpha(t_1 - t_2), \end{aligned} \tag{A-8}$$

而且也可写为

$$\begin{aligned} \widetilde{G}^0_{\alpha\beta}(t_1 - t_2) &= -\langle \bar{\phi}_0 | \widetilde{T}\{\xi_\alpha(t_1)\,\xi^+_\beta(t_2)\} | \phi_0 \rangle \\ &= \delta_{\alpha\beta}\,[n_\alpha - \theta(t_2 - t_1)]\, e^{-i\varepsilon_\alpha(t_1 - t_2)} \equiv \delta_{\alpha\beta}\, \widetilde{G}^0_\alpha(t_1 - t_2), \end{aligned} \tag{A-9}$$

其中 $\widetilde{T}$ 表示反时序算符,其定义如下:

$$\widetilde{T}\{\xi_\alpha(t_1)\,\xi^+_\beta(t_2)\} = \begin{cases} -\xi^+_\beta(t_2)\,\xi_\alpha(t_1), & t_1 > t_2 \\ \xi_\alpha(t_1)\,\xi^+_\beta(t_2), & t_1 < t_2 \end{cases}$$

由式 (A-8) 与 (A-9) 我们看到, 如果 $\mathrm{Im}\varepsilon_p > 0$ 与 $\mathrm{Im}\varepsilon_h < 0$, 则式 (A-8) 的解是不可取的, 但式(A-9)的解却是可取的,因为这时 $\lim\limits_{t\to\infty} G^0_p(t)$ 与 $\lim\limits_{t\to-\infty} G^0_h(t)$ 都发散,而 $\widetilde{G}^0_{\alpha\beta}(t)$ 却有好的定义, 反之, 倘若 $\mathrm{Im}\varepsilon_p < 0$ 与 $\mathrm{Im}\varepsilon_h > 0$, 则式 (A-8) 是可取的,但式 (A-9)却是不可取的. 由此可引进 $\hat{G}^0_{\alpha\beta}(t)$, 其定义为: 如果 $\mathrm{Im}\varepsilon_p \leqslant 0$ 与 $\mathrm{Im}\varepsilon_h \geqslant 0$, 则 $\hat{G}^0_{\alpha\beta}(t) = G^0_{\alpha\beta}(t)$; 而当 $\mathrm{Im}\varepsilon_p > 0$ 与 $\mathrm{Im}\varepsilon_h < 0$ 时,则 $\hat{G}^0_{\alpha\beta}(t) = \widetilde{G}^0_{\alpha\beta}(t)$. 显然, 对任意实数与复数的 ε_α, $\hat{G}^0_{\alpha\beta}(t)$ 均有好的定义而且它的傅氏变换就是式 (II 14*). 由于 $\hat{G}^0_{\alpha\beta}(t)$ 满足式 (A-7), 因此式 (A-3) 的积分形式可写为

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(t_1 - t_2) = \delta_{\alpha\beta}\,\hat{G}^0_\alpha(t_1 - t_2) &+ \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int d\sigma_1\, d\sigma_2\, \hat{G}^0_\alpha(t_1 - \sigma_1) \\ &\times \sum_\gamma [M_{\alpha\gamma}(\sigma_1 - \sigma_2) + i\,u_{\alpha\gamma}\,\delta(\sigma_1 - \sigma_2)]\, G_{\gamma\beta}(\sigma_2 - t_2), \end{aligned} \tag{A-10}$$

上式也就是式 (A-6) 的傅氏逆变换.

另一文[7]已指出,当核子间相互作用不仅含有二体力而且还含有多体力时,结论 A 仍成立. 从第二节中的证明我们看到,只要式 (18) 成立就必有结论 A. 以上讨论说明, 即使考虑介子自由度,即 $\boldsymbol{V}$ 是由交换介子而产生的,结论 A 同样有效,作为举例,让我们考虑核子间相互作用是由交换中性标量介子而产生的简单情形[8],[9]. 这时体系的哈密顿量可以写为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{V} - \sum_{\alpha\gamma} u_{\alpha\gamma}\,\xi^+_\alpha\,\xi_\gamma \\ \boldsymbol{H}_0 &= \sum_\alpha \varepsilon_\alpha\,\xi^+_\alpha\,\xi_\alpha + \int d^3k\,\Omega_k\,B^+_{\boldsymbol{k}}\,B_{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{V} &= \lambda_0 \int d^3x\,\psi^+(\boldsymbol{x})\,Q(\boldsymbol{x})\,\psi(\boldsymbol{x}) \\ &= \lambda \int d^3k \sum_{\mu\nu} \langle \bar{\mu} | e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} | \nu \rangle\, \xi^+_\mu\,\xi_\nu\,Q_{\boldsymbol{k}}, \end{aligned}\right\}, \tag{A-11}$$

其中 Σ 显然不仅表示向断续谱求和而且也表示向连续谱积分，$\lambda = \lambda_0 (2\pi)^{-\frac{3}{2}}$，

$$\left.\begin{aligned} Q(\boldsymbol{x}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int d^3k\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} Q_{\boldsymbol{k}} \\ Q_{\boldsymbol{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_k}}(B_{\boldsymbol{k}} + B^+_{-\boldsymbol{k}}), \end{aligned}\right\}, \tag{A-12}$$

$B^+_{\boldsymbol{k}}$ 与 $B_{\boldsymbol{k}}$ 分别表示介子产生与消灭算符，它们满足交换关系 $[B_{\boldsymbol{k}}, B^+_{\boldsymbol{k}'}] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$，$\Omega_k = (k^2 + \mu_0^2)^{1/2}$，$\mu_0$ 为介子的静止质量.

仿照 Dover 与 Lemmer[8] 的论据容易求得

$$\begin{aligned} G(V_\alpha, \beta; t_1 - t_2) &= \lambda \int d^3k \sum_\nu \langle \bar{\alpha} | e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} | \nu \rangle \\ &\quad \times \langle \Psi_0 | T\{\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}(t_1) \bar{\boldsymbol{\xi}}_\nu(t_1) \boldsymbol{\xi}^+_\beta(t_2)\} | \Psi_0 \rangle \\ &= -\lambda^2 \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sum_\nu \langle \bar{\alpha} | e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} | \nu \rangle \\ &\quad \times D_k(t_1 - t') \langle \Psi_0 | T\{\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{k}}(t') \bar{\boldsymbol{\xi}}_\nu(t_1) \boldsymbol{\xi}^+_\beta(t_2)\} | \Psi_0 \rangle, \end{aligned} \tag{A-13}$$

其中 $D_k(t_1 - t_2)$ 的表达式见资料[8]，

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{k}}(t) = \sum_{\mu\nu} \langle \bar{\mu} | e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} | \nu \rangle \boldsymbol{\xi}^+_\mu(t) \bar{\boldsymbol{\xi}}_\nu(t). \tag{A-14}$$

很明显，只要由式(A-5)定义的质量算符 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 存在，就必有式(18)，由此结论 A 成立. 因为场论目前仍存在发散困难，所以在实际计算 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 时需要针对 $\boldsymbol{V}$ 的不同选择引进重整化、重规化或形状因子等收敛化方法. 上面的讨论说明，如果按式(3)选择 $u_{\alpha\beta}$，则结论 A 可看为是这些收敛化方法应满足的一个条件.

参 考 文 献

[1] 吴式枢，物理学报，**25** (1976)，433.
[2] 吴式枢，高能物理与核物理，**2** (1978)，10.
[3] R. L. Becker, R. W. Jones, *Nucl. Phys.*, **A174** (1971), 449.
[4] S. Ethofer, P. Schuck, *Z. Physik*, **228** (1969), 264.
[5] B. H. Brandow, *Rev. Mod. Phys.*, **39** (1967), 771.
[6] A. Klein, "Lectures on the many-body problem", Vol. 1, ed. E. R. Caianiello (Academic Press 1962).
[7] 吴式枢，高能物理与核物理，**3** (1979)，240.
[8] C. B. Dover and R. H. Lemmer, *Phys. Rev.*, **165** (1968), 1105.
[9] F. Catara et al., *Nucl. Phys.*, **A276** (1977), 433.

ON NUCLEAR SINGLE-PARTICLE POTENTIALS (III) SINGLE-PARTICLE ENERGIES DETERMINED BY THE NONHERMITIAN POTENTIAL $U_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$

WU SHI-SHU

(*Department of Physics, Jilin University*)

ABSTRACT

In this paper the following results are proved: although the single-particle (sp) potential $u_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$ defined in terms of the mass operator $M_{\alpha\beta}(\omega)$ is nonhermitian, the discrete energy eigenvalues determined by the Schrödinger equation

$$\boldsymbol{h}|\gamma\rangle = (\boldsymbol{t} + \boldsymbol{u})|\gamma\rangle = \varepsilon_\gamma|\gamma\rangle$$

are real; moreover, they satisfy exactly the following relation :

$$\varepsilon_\gamma = \pm[E_{n\gamma}(N\pm1) - E_0(N)]$$

where $E_0(N)$ denotes the exact ground state energy of a closed-shell nucleus N, and $E_{n\gamma}(N \pm 1)$ are excat energy eigenvalues of its neighbouring $N \pm 1$ nucleus.

Further, in order to determine whether the bound state energies obtained by any other sp potential may or not satisfy the above relation, a simple method is suggested. It is shown that the amplitude renormalization of the sp Green function can also be calculated easily by means of this method.