

二维色动力学的红外结构和 电磁形状因子

黄 涛 薛丕友

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文讨论了 1+1 维 QCD 理论的一个模型. 在这个模型里, 应用 't Hooft 的 $1/N$ 展开技巧, 并考虑到非阿贝尔规范理论的红外结构的影响, 假定了 $g^2(z) \sim \frac{1}{z^{\kappa-1}}$, 从而给出层子的传播函数和介子的 Bethe-Salpeter 方程以及波函数的性质和特点. 进一步计算了介子的电磁形状因子和深度非弹过程的结构函数. 计算结果表明, 如果实验上给出的电子与介子深度非弹行为和电子与质子深度非弹行为接近, 则要求标征红外行为的 κ 应不大于 2.

一、引 言

量子色动力学 (通常简记为 QCD) 是强相互作用的规范理论. 即假定层子携带一种“颜色”量子数, 而层子间的相互作用是通过非阿贝尔规范场的矢量胶子来传递的. 这种强相互作用的动力学理论就是量子色动力学.

“色”自由度最早是在研究重子的统计性质中引入的^[1]. 三种颜色相应于三套不同的层子. 由三个层子组成的普通重子关于色自由度是反对称的, 这样就保证了总的重子波函数反对称性, 层子作为狄拉克粒子的自旋统计性质得到了满足.

为了解释层子间超强相互作用的饱和性, 假设层子间的作用力是交换色空间内的矢量胶子. 这种矢量胶子不是“中性”的, 而是色多重态. 或者说, 引入色相关的势, 例如文献[3]中引入的势:

$$\sum_{i=1}^8 \frac{\lambda_i^{(a)}}{2} \cdot \frac{\lambda_i^{(b)}}{2} V(r) \quad (1)$$

其中 $\lambda_i^{(a)}$ 和 $\lambda_i^{(b)}$ 是色空间的无穹小算子. 这样一种势使得色单态与非色单态分开来, 其最低能态就是色单态, 色激发态将处于较高能级的态. 通常发现的介子、重子都是色单态. 层子、两个层子的结合态、胶子以及其它的态 (如四个层子、两个层子、两个反层子的束缚态……) 都是非单色态, 处于较高能级的位置上, 所以至今未被实验上所发现. 在这个意义上可以假定非色单态是近似地被“囚禁” (confinement).

在上述思想下构成的强相互作用量子场论, 即 QCD, 与最成功的量子电动力学

(QED) 非常相似, 所不同只在于电磁场是阿贝尔规范场, 胶子场是非阿贝尔规范场. 在 QCD 中, 拉氏函数的形式是:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G_{\mu\nu}^i - \bar{q}^i (r_\mu D_\mu + m) q_i. \quad (2)$$

其中:

$$G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g[A_\mu, A_\nu]^i, \quad (3)$$

$$D_\mu q^i = \partial_\mu q^i + g A_\mu^i q^i, \quad (4)$$

A_μ^i 是反厄米的无迹的胶子场, i 是色空间指标, $i, j = 1, 2, \dots, N$, 即我们取规范群为 $SU(N)$ 群. 这里为了方便起见, 假定在么旋空间中只有一种层子, 即取“味”规范群为 $U(1)$. m 是层子的质量, g 是耦合常数. QCD 中的拉氏函数(2)体现了由(1)给出的势. 从量子场论角度如何由拉氏函数(2)导出一系列强子性质, 就是 QCD 理论所要解决的问题.

对于非阿贝尔规范理论有一个重要特点: 胶子是带“色荷”的. 这样层子周围不仅有虚层子对云, 而且有胶子云. 由于这一特点使得 QCD 与 QED 不同. 在 QCD 理论里, 控制大动量行为的是有效耦合常数 g_f . 高能时, g_f 趋于零, 即原点是稳定的不动点, 或者说紫外行为是稳定的. 在这个意义上说, 非阿贝尔规范理论是渐近自由场论^[4]. 可是红外行为是不稳定的, 有奇异性^[5]. 紫外行为稳定这一特点使得深度非弹理论中的 Scaling 行为在场论范围里得到深刻的理解^[6], 也使非阿贝尔规范理论有一个较可靠的实验基础.

要想完全解决 QCD 理论是很困难的. 因为强相互作用理论耦合常数很强, 不能应用普通微扰论来解决. 对于非阿贝尔规范理论仅在高能时可以应用微扰论, 低能情况微扰论则无能为力, 特别是红外行为更是不可靠的. 1974 年 't Hooft^[7] 利用 $1/N$ 拓扑展开方法提出了一个 $1+1$ 维的介子模型. 后来人们^[8,9] 又进一步地展开了这一模型所包含的特点. 近来很多人^[10] 又应用这些特点去解释强相互作用、电磁相互作用和弱相互作用中许多现象.

本文将对 't Hooft 的 $1+1$ 维模型作简短的分析, 并考虑到非阿贝尔规范理论的红外结构影响, 解出层子的传播函数, 写下介子的 Bethe-Salpeter 方程并讨论它们的特点, 也讨论了介子电磁形状因子, 从而给出合理的幂行为以及深度非弹过程中结构函数的特点. 结果表明介子电磁形状因子和深度非弹过程中的结构函数与红外行为紧密相关. 假定耦合常数:

$$g^2(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^{\kappa-1}}, \quad (5)$$

当 $\kappa \leq 2$ 时, 有可能与实验结果符合.

本文拟分四节讨论: 一、引言; 二、给出二维 Yang-Mills 理论一些预备知识, 通过对非阿贝尔规范场论中的红外结构的讨论和分析, 引入了我们对红外结构的假定; 三、在 $1+1$ 维里求解层子的传播函数, 讨论介子波函数的特点以及相关的问题; 四、讨论介子形状因子和深度非弹过程的结构函数.

二、二维 Yang-Mills 理论和红外结构

$1+1$ 维色动力学的拉氏函数形式如(2)式描述. 只不过其中:

$$\begin{aligned}\mu &= 1, 4, \\ x_1 &= x_1, \quad x_4 = it, \\ x_\mu x_\mu &= x_1^2 + x_4^2 = x_1^2 - t^2, \\ P_\mu P_\mu &= P_1^2 + P_4^2 = P^2 - E^2.\end{aligned}$$

引入光锥坐标和相应 γ 矩阵:

$$x_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm t). \quad (6)$$

$$x^2 = x_\mu x_\mu = x_+ x_- + x_- x_+ = 2x_+ x_-,$$

$$\gamma_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1 \mp i\gamma_4). \quad (7)$$

$$\gamma_+^2 = \gamma_-^2 = 0. \quad (8)$$

$$\{\gamma_+, \gamma_-\} = 2. \quad (9)$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{2}[\gamma_+, \gamma_-]. \quad (10)$$

取一定表象后,可以写出 γ 矩阵的显示形式:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad \gamma_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -i \\ i & -i \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (11)$$

选择光锥规范,即取:

$$A_- = 0. \quad (12)$$

其中规范场 A_+ 定义为:

$$A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 \mp iA_4), \quad (13)$$

在取规范 $A_- = 0$ 的情况下,(3)中的自耦合项消失,

$$G_{+-}^i = \partial_+ A_-^i - \partial_- A_+^i, \quad (14)$$

$$G_{-+}^i = \partial_- A_+^i - \partial_+ A_-^i.$$

也即非线性相互作用项消失,也没有鬼态,使问题大大简化,在选取(12)以后,拉氏函数(2)可以记作:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(G_{+-}^i G_{+-}^i + G_{-+}^i G_{-+}^i) - \bar{q}^i (\gamma_+ D_- + \gamma_- D_+ + m) q^i, \quad (2')$$

其中 G_{+-}^i 由(14)给出, D_+ 和 D_- 分别为:

$$D_+ q^i = \partial_+ q^i + g A_{+i}^j q^j, \quad (15)$$

$$D_- q^i = \partial_- q^i.$$

这样,我们很容易地写下费曼规则:(见图1)

胶子场的自耦合项消失,只有层子与胶子的相互作用项,可是普通的微扰展开对于强相互作用 Yang-Mills 理论已毫无价值,必须寻找新的微扰途径. 1974年, 't Hooft 提出一种展开方法^[7]: 大 N 拓扑展开, N 是色规范群 $SU(N)$ 的阶数,即颜色的个数. 这种展

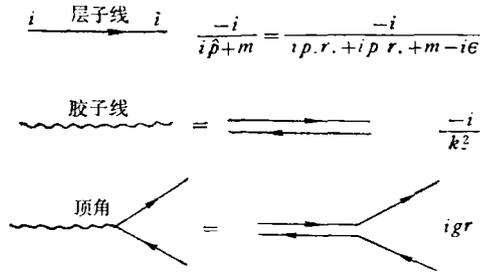


图 1 费曼规则

开相当于对 Green 函数按 $1/N$ 幂展开,取主导图. N 愈大,这种展开近似愈准. 实际强相互作用模型中 $N = 3$, 定性地讨论强子结构模型的特征也是有用的.

'tHooft 已经表明^[7], 在大 N 极限下非阿贝尔规范理论的费曼图显示出特有的拓扑学性质. 在大 N 极限下主导图仅仅取层子线在边缘的平面 (planar) 图组成, 此外没有费米子环 (loop) 发生. 例如图 2 就是在四维 QCD 里一个典型的平面图. 在这个图里还没有包含鬼粒子线, 所以普遍地研究四维 QCD 的 $1/N$ 展开也还是很复杂的.

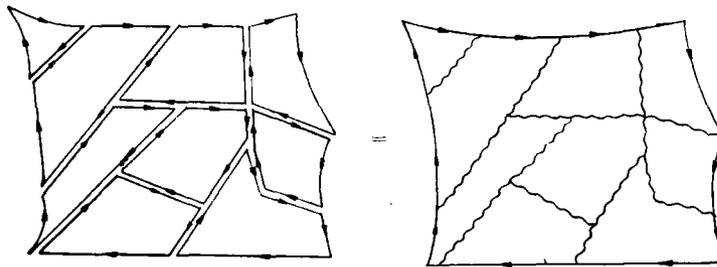


图 2 四点函数的一个平面图

可是在二维 QCD 里就更简单了, 因为当取了光锥规范以后, 胶子的自耦合项消失, 那么在平面图里就去掉了那些胶子的交叉图, 只存在那些胶子线平行的图. 例如层子的自能, 在大 N 极限的主导图是图 3 形式.

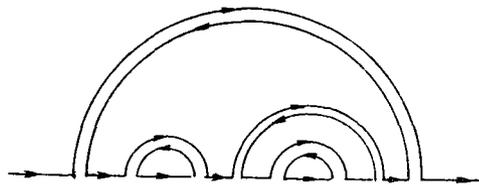


图 3 层子自能图的一个例子

特别重要的是在大 N 极限下, 当仅取主导级时, 既没有顶角修正, 也没有胶子传播函数的修正. 在文献[8]中曾研究了非主导图的贡献, 是否会改变模型的定性特点, 其结论是: 不改变模型的定性结论.

我们知道, 对于非阿贝尔规范场, 由于胶子是无质量的, 红外发散也像 QED 情况一样存在. 可是在量子电动力学里, 由于它的结构简单, 在微扰论对所有的图求和就可以消

去,即无红外发散,其物理振幅是有限的.可是在非阿贝尔情况下,不仅是微扰论不能用的问题,而且群的结构和图形上的复杂性都带来了很大的困难.

在非阿贝尔规范理论里,紫外行为是清楚的.它与量子电动力学也不同.在QED里,电子的中心裸电荷 e_0 很大,然而在它周围真空极化效应产生电屏蔽,所以测量得到的物理电荷 $e \left(\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \right)$ 是有限的.然而在QCD里,裸色荷是极小的,以至于在近距离内有 $g \rightarrow 0$. 在色荷周围,除了正、反层子云外,还有胶子云.总的效果产生一个反屏蔽荷.其结果为:层子的色荷在近程(高能)是极小的,远程时增加.这样一个紫外行为已在重正化群方法下得到了较为透彻的研究,通常称之为渐近自由^[6],或者说,非阿贝尔规范理论存在着紫外稳定的零点.这样一个结果在实验上与深度非弹过程中的 Scaling 现象相符合.

非阿贝尔规范理论的红外行为至今尚不清楚,只知道非阿贝尔规范理论不具有红外稳定的零点.所以在层子之间的相互作用存在长程力,起束缚作用结合为强子.对于非阿贝尔规范理论的红外结构有很多文章进行了研究,但都有一个共同的结论,当 $k^2 \rightarrow 0$ 时, g^2 不再是不变的常数,而是 k^2 的函数^[11],即:

$$g^2 \rightarrow g^2(k^2) \tag{17a}$$

或传播子为

$$g^2 \frac{-i}{k^2} \rightarrow g^2(k^2) \frac{-i}{k^2}. \tag{17b}$$

相当于层子间的相互作用是交换有效胶子.由于目前尚不能完全确定 $g^2(k^2)$ 的函数形式,我们的办法是假定一个唯象的形式,即令:

$$g^2(k^2) = \frac{g^2 C_\kappa}{(k^2)^{\kappa-1}} \quad \kappa \geq 1, \tag{18}$$

$\kappa = 1, C_1 = 1$ 就是 g^2 为常数的情况,将(18)式代入强子结构模型中,就可以考察 κ 的影响.近来在国外文献上也看到有人在研究形式(18)对强子结构模型的影响.当然更普遍的形式是对式(18)中的 κ 求和.

三、一个二维模型

在 $1/N$ 拓扑展开下,只考虑主导级图,如图4所示.各种这样的图求和就给出层子

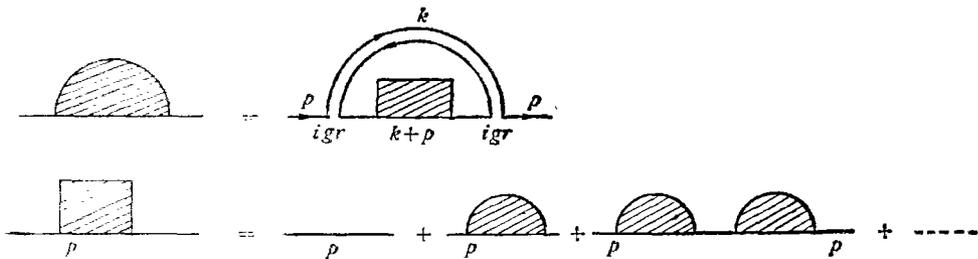


图4 层子自能方程图解

传播函数所满足的方程:

$$S_F(p) = \frac{-i}{i\hat{p} + m + M(p)} \tag{19}$$

$$= \frac{-i(m - i\gamma_+p_- - i\gamma_-p_+)}{m^2 + p^2 + (m - i\gamma_+p_- - i\gamma_-p_+)M(p)} \tag{20}$$

其中 $M(p)$ 是质量算符, 定义如下:

$$-p_- \Gamma(p) = (m - i\gamma_+p_- - i\gamma_-p_+)M(p). \tag{21}$$

$$\Gamma(p) = \frac{4g^2N}{(2\pi)^2} \int dk_+ dk_- \frac{C_\kappa i(k_- + p_-)}{k_-^{2\kappa} \cdot [m^2 + 2(k_+ + p_+) - \Gamma(k_+ p)(k_- + p_-)] - i\epsilon}. \tag{22}$$

$$S_F(p) = \frac{-i(m - i\gamma_+p_- - i\gamma_-p_+)}{m^2 + p^2 - P_- \Gamma(p)}. \tag{20'}$$

作积分代换: $k_+ \rightarrow k_+ + p_+$. 从式(22)可以见到 $\Gamma(p)$ 与 p_+ 无关, 即 $\Gamma(p)$ 仅是 p_- 的函数:

$$\Gamma(p) = \Gamma(p_-). \tag{23}$$

将式(23)代入到(22), 并引入红外截断参量 λ , 令:

$$|k_-| \geq \lambda, \quad \lambda > 0,$$

经过不大复杂的计算可得:

$$-p_- \Gamma(p_-) = \frac{g^2N}{\pi} \frac{C_\kappa}{2\kappa - 1} \left(\frac{|p_-|}{\lambda^{2\kappa-1}} - \frac{1}{|p_-|^{2\kappa-2}} \right). \tag{24}$$

当 $\kappa = 1, C_\kappa = 1$ 时, 式(24)就回到了 't Hooft 文章中所讨论的情况^[7]. 将(24)代入(20)就得到:

$$S_F(p) = \frac{-i(m - i\gamma_+p_- - i\gamma_-p_+)}{p^2 + m^2 + \frac{g^2N}{\pi} \frac{C_\kappa}{2\kappa - 1} \left(\frac{|p_-|}{\lambda^{2\kappa-1}} - \frac{1}{|p_-|^{2\kappa-2}} \right) - i\epsilon}. \tag{25}$$

为了下面讨论, 定义一个 $S_E(p)$:

$$2\gamma_- S_E(p) = \gamma_- S_F(p) \gamma_-,$$

由此求得

$$S_E(p) = \frac{-ip_-}{p^2 + m^2 + \frac{g^2N}{\pi} \frac{C_\kappa}{2\kappa - 1} \left(\frac{|p_-|}{\lambda^{2\kappa-1}} - \frac{1}{|p_-|^{2\kappa-2}} \right) - i\epsilon}. \tag{25'}$$

这样, 在二维 QCD 里, 不依赖微扰论, 采用 $1/N$ 拓扑展开技巧得到了层子的传播函数.

对于层子和反层子的束缚态波函数, 满足 Bethe-Salpeter 方程:

$$\phi_\alpha(P, p) = S_F(p) \Gamma_\alpha(P, p) S_F(P - p). \tag{26}$$

在 $1/N$ 展开下, 取主导图的贡献就是梯形图.

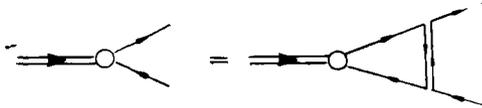


图 5 束缚态波函数所满足的方程

对式(26)中 $\Gamma_\alpha(P, p)$ 的贡献为:

$$\Gamma_\alpha(P, p) = \frac{ig^2N}{\pi^2} \int \frac{d^2k C_\kappa}{(k_- - p_-)^{2\kappa}} \phi_\alpha(P, k). \quad (27)$$

注意到式(27)右边与 p_+ 无关, 所以 $\Gamma(P, p)$ 仅是 p_- 的函数, 定义:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(P, p) &= \int dp_+ \phi_\alpha(P, p) \\ &= \int dp_+ S_F(p) \Gamma_\alpha(P, p_-) S_F(P - p). \end{aligned} \quad (28)$$

将式(25)代入上式, 对 p_+ 积分, 注意到积分回路只有通过两极点之间才有贡献, 就得到方程:

$$\begin{aligned} \left[P_+ + \frac{m_a^2}{2p_-} + \frac{m_b^2}{2(P_- - p_-)} + \frac{g^2N}{2\pi} \frac{C_\kappa}{2\kappa - 1} \left(\frac{2}{\lambda^{2\kappa-1}} - \frac{1}{|p_-|^{2\kappa-1}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{|P_- - p_-|^{2\kappa-1}} \right) \right] \varphi(P, p_-) = \frac{g^2N}{2\pi} \theta(-p_-) \theta(p_- - P_-) C_\kappa \left[\frac{1 + (-1)^{2\kappa}}{2\kappa - 1} \right. \\ \left. \cdot \frac{\varphi(P, p_-)}{\lambda^{2\kappa-1}} + P \int dk_- \frac{\varphi(P, p_- + k_-)}{k_-^{2\kappa}} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

从式(29)可以见到当 $\kappa =$ 整数时, 就可以消去红外截断参量 λ . 在式(29)中出现的两个 θ 函数, 表明在束缚态内部, 层子和反层子的 $p_- < 0$, $p_- - P_- < 0$, 交换胶子不引起倒向.

当 $\kappa =$ 整数时, 上述方程两边含 λ 的项相消, 以下我们将只讨论 κ 为整数的情形. 如果定义:

$$x = \frac{p_-}{P_-} \quad (29)$$

$$\alpha_\kappa(P_-) = \frac{C_\kappa}{P_-^{2\kappa-2}}. \quad (30)$$

就得到方程: ($P^2 = -\mu^2$)

$$\begin{aligned} \left[-\mu^2 + \frac{m_a^2}{x} + \frac{m_b^2}{1-x} - \frac{g^2N}{\pi} \frac{\alpha_\kappa(P_-)}{2\kappa - 1} \left(\frac{1}{x^{2\kappa-1}} + \frac{1}{(1-x)^{2\kappa-1}} \right) \right] \varphi(P, x) \\ = \frac{g^2N}{\pi} \alpha_\kappa(P_-) P \int_0^1 dy \frac{\varphi(P, y)}{(y-x)^{2\kappa}}, \end{aligned} \quad (31)$$

或者记作:

$$(\mu^2 - \hat{H})\varphi(P, x) = 0, \quad (32)$$

其中:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (33)$$

$$\hat{H}_0 = \frac{m_a^2}{x} + \frac{m_b^2}{1-x} - \frac{g^2N}{\pi} \frac{\alpha_\kappa(P_-)}{2\kappa - 1} \left(\frac{1}{x^{2\kappa-1}} + \frac{1}{(1-x)^{2\kappa-1}} \right), \quad (34)$$

$$\hat{V}\varphi(P, x) = \frac{g^2N}{\pi} \alpha_\kappa(P_-) P \int_0^1 dy \frac{\varphi(P, y)}{(y-x)^{2\kappa}}, \quad (35)$$

式(32)是本征方程, 边界条件可以选择为:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (36)$$

首先考虑 $x \sim 0$ 附近, 方程(31)变为:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{m_a^2}{x} - \frac{g^2 N}{\pi} \frac{\alpha_\kappa(P_-)}{2\kappa - 1} \cdot \frac{1}{x^{2\kappa-1}} \right] \varphi(P, x) \\ & = \frac{g^2 N}{\pi} \alpha_\kappa(P_-) P \int_0^1 dy \frac{\varphi(P, y)}{(y-x)^{2\kappa}}. \end{aligned} \quad (37)$$

设 $x \sim 0$ 时,

$$\varphi(x) \sim x^{\beta_a}. \quad (38)$$

代入到式(37)右边的积分给出:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{m_a^2}{x} - \frac{g^2 N}{\pi} \frac{\alpha_\kappa(P_-)}{2\kappa - 1} \cdot \frac{1}{x^{2\kappa-1}} \right] \\ & = -\frac{g^2 N}{\pi} \alpha_\kappa(P_-) \frac{1}{x^{2\kappa-1}} \frac{\beta_a(\beta_a - 1) \cdots (\beta_a + 2 - 2\kappa)}{(2\kappa - 1)!} \pi \operatorname{ctg} \beta_a \pi. \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$2\kappa - 2 < \beta_a < 2\kappa - 1, \quad (40)$$

值得指出, β_a 的限制条件(40)是由(38)代入(37)后作分部积分时引入的.

当 $\kappa = 1$ 时 ($C_\kappa = 1$),

$$m_a^2 - \frac{g^2 N}{\pi} = -\frac{g^2 N}{\pi} \beta_a \pi \operatorname{ctg} \beta_a \pi. \quad (41)$$

当 $\kappa > 1$ 时,

$$(2\kappa - 2)! = \beta_a(\beta_a - 1) \cdots (\beta_a + 2 - 2\kappa) \pi \operatorname{ctg} \beta_a \pi. \quad (42)$$

同样, 当 $x \sim 1$ 时, 得到的方程是:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{m_b^2}{1-x} - \frac{g^2 N}{\pi} \frac{\alpha_\kappa(P_-)}{2\kappa - 1} \cdot \frac{1}{(1-x)^{2\kappa-1}} \right] \varphi(P, x) \\ & = \frac{g^2 N}{\pi} \alpha_\kappa(P_-) P \int_0^1 dy \frac{\varphi(P, y)}{(y-x)^{2\kappa}}. \end{aligned} \quad (43)$$

设 $x \sim 1$ 时,

$$\varphi(x) \sim (1-x)^{\beta_b}. \quad (44)$$

用类似的方法可以得到 β_b 所满足的方程, 与 β_a 完全一样.

要想完全求解方程(31)或(32)是很困难的. 但是我们可以从此方程得到一些重要性质, 对于讨论具体问题是很有用的.

1. 从方程(31)式可以得到两个等式:

$$\mu^2 \varphi(P, x) = \left(\frac{m_a^2}{x} + \frac{m_b^2}{1-x} \right) \varphi(P, x) + \frac{g^2 N}{\pi} \alpha_\kappa(P_-) \int_0^1 dy \frac{\varphi(P, x) - \varphi(P, y)}{(y-x)^{2\kappa}}. \quad (45)$$

$$\mu^2 \int_0^1 \varphi(P, x) dx = \int_0^1 dx \left[\frac{m_a^2}{x} + \frac{m_b^2}{1-x} \right] \varphi(P, x). \quad (46)$$

因为当 $\kappa =$ 整数时,

$$\int dx dy \frac{\varphi(P, x) - \varphi(P, y)}{(y-x)^{2\kappa}} = 0,$$

由(46)我们看到,当 $m_a = m_b = 0$ 时,基态有零能解。

2. 从方程(31)可以见到, x 和 $(1-x)$ 处于非常对称的地位。确切地说 $\varphi^{a\bar{b}}(P, x)$ 所满足的方程与 $\varphi^{b\bar{a}}(P, 1-x)$ 所满足的方程完全一样,因此有:

$$\varphi^{a\bar{b}}(P, x) = C\varphi^{b\bar{a}}(P, 1-x), \quad (47)$$

继续用此关系式就可知 $C^2 = 1$, 所以 $C = \pm 1$,

因此有:

$$\varphi^{a\bar{b}}(P, x) = \pm\varphi^{b\bar{a}}(P, 1-x). \quad (48)$$

这就是在文献[9]中所说的“宇称”关系。物理上反映二维 QCD 所描述的介子波函数和反介子波函数之间一种“对称”关系。

3. 由(36),我们对函数 $\varphi(x)$ 限定了它的定义域,使得它在边界 0 或 1 上均为零,式(38)和(44)满足边界条件(36),例如我们可以选取:

$$\varphi(x) = \frac{1}{[B(2\beta_a + 1, 2\beta_b + 1)]^{1/2}} x^{\beta_a}(1-x)^{\beta_b}.$$

式中 $B(m, n)$ 是为了使 $\varphi(x)$ 归一化而引入的欧拉第一类积分。这样利用通常意义上的内积定义,在间隔 $[0, 1]$ 上定义一个平方可积的 Hilbert 空间 $L^2[0, 1]$, 则

$$\varphi(x) \in L^2[0, 1],$$

就有

$$H\varphi(x) \in L^2[0, 1].$$

而且利用(31)、(32),可以证明 $(H\varphi, \psi) = (\varphi, H\psi)$ 。因而哈密顿算符 H 的谱形成完备集,即介子本征函数 $\{\varphi_n(x)\}$ 形成 Hilbert 空间 $L^2[0, 1]$ 的一个完备集。

4. 为了下一节讨论形状因子的需要,将上面讨论的束缚态问题推广到层子、反层子散射情况。对于层子、反层子散射情况在 $1/N$ 展开下,其主导图仍为梯形图(见图6)。

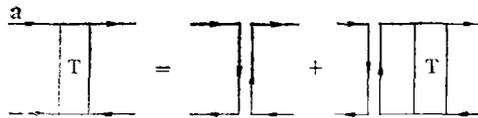


图6 层子和反层子散射

相应的积分方程为:

$$T_{\alpha\beta, \gamma\delta}(P, p, p') = (\gamma^-)_{\alpha\gamma}(\gamma^-)_{\beta\delta} T(P, p, p'),$$

$$T(P, p, p') = \frac{g^2}{(p_- - p'_-)^{2\kappa}} + 4ig^2N_c \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{S_F^\alpha(k)S_F^\beta(p-k)}{(k_- - p_-)^{2\kappa}} T(P, k, p'). \quad (49)$$

实际上 $T(P, p, p')$ 只是 x 的函数,若 T 换以 Γ 就给出方程(27)。若定义:

$$T(P, x, x') = -\frac{\alpha_\kappa(P_-)g^2N}{P^2} \langle x | \hat{T} | x' \rangle, \quad (50)$$

$$\langle x | \hat{H}_0 | y \rangle = \left[\frac{m_a^2}{x} + \frac{m_b^2}{1-x} - \frac{g^2N}{\pi} \frac{\alpha_\kappa(P_-)}{2\kappa-1} \left(\frac{1}{\lambda^{2\kappa-1}} + \frac{1}{(1-x)^{2\kappa-1}} \right) \right] \delta(x-y), \quad (51)$$

$$\langle x | \hat{V} | y \rangle = -P\alpha_\kappa(P_-) \frac{1}{(y-x)^{2\kappa}}. \quad (52)$$

其中 \hat{V} 是积分算符, 并在主值意义上理解之.

且有:
$$\langle x | \hat{G} | y \rangle = G(\mu^2, x, y).$$

其中:

$$(\mu^2 - H)G(\mu^2; x, y) = \delta(x - y), \tag{53}$$

那么就有:

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{\mu^2 - \hat{H}_0} \hat{T}, \tag{54}$$

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V} \hat{G} \hat{V}, \tag{55}$$

$$\hat{T} = \hat{V} \hat{G} (\mu^2 - \hat{H}_0) = (\mu^2 - \hat{H}_0) \hat{G} \hat{V}. \tag{56}$$

根据前面讨论, 介子波函数在 $[0, 1]$ 上形成完备集, 故(53)的一个显然解可以写成:

$$G(\mu^2; x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n^{a\bar{b}}(x) \varphi_n^{a\bar{b}*}(y)}{\mu^2 - \mu_n^2 + i\epsilon}. \tag{57}$$

由性质(48)可给出:

$$G^{a\bar{b}}(\mu^2; x, y) = G^{b\bar{a}}(\mu^2; 1 - x, 1 - y). \tag{58}$$

若定义

$$G^{a\bar{b}}(\mu^2, x) \equiv \int dy G^{a\bar{b}}(\mu^2; x, y), \tag{59}$$

则有

$$G^{a\bar{b}}(\mu^2, x) = G^{b\bar{a}}(\mu^2; 1 - x). \tag{60}$$

四、介子电磁形状因子和介子深度非弹过程的结构函数

在 $\kappa = 1$ 的情况下, Einhorn^[9] 已经讨论了介子的电磁形状因子和结构函数 νW_2 , 我们现在考察 κ 为大于 1 的整数对电磁形状因子和结构函数 νW_2 的影响.

1. 介子形状因子.

$$\text{介子 } \alpha \quad P'^2 = -\mu_a^2$$

$$\text{介子 } \beta \quad P'^2 = -\mu_b^2$$

$$P_\mu - P'_\mu = q_\mu$$

形状因子 $(F_\mu)_{\beta\alpha}$ 定义为

$$\begin{aligned} (F_\mu)_{\beta\alpha} &= \langle \beta | J_\mu | \alpha \rangle \\ &= \left(P_\mu + P'_\mu + \frac{\mu_b^2 - \mu_a^2}{q^2} q_\mu \right) F(q^2) \end{aligned} \tag{61}$$

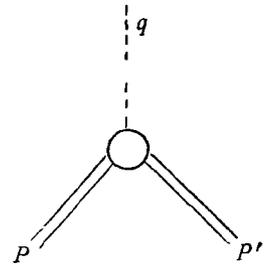


图 7 介子电磁形状因子

介子 α, β 是由层子 a 和反层子 \bar{b} 组成, 介子与光子相互作用可以是层子 a 与光子相互作用, 也可以是层子 b 与光子相互作用, 即:

$$(F^a)_{\beta\alpha} = \frac{-2il_a}{\pi} \int d^2k \Gamma_\beta^{a\bar{b}}(P, k) S_E^a(k) \Gamma_\alpha^a(q, k) S_E^a(k - q) \Gamma_\alpha^{a\bar{b}}(P', k - q) S_E^b(k - p)$$

$$(F^b)_{\beta\alpha} = (F^a)_{\beta\alpha} |_{a \rightarrow b}. \tag{62}$$

在式(62)中 $\Gamma_\alpha^{a\bar{b}}, \Gamma_\beta^{a\bar{b}}$ 就是式(27)所定义的顶角, $S_E(k)$ 为式(25')所定义的函数, $\Gamma^a(q, k)$ 是层子的电磁形状因子, 由下式定义:

$$\Gamma^a(q, x) = e\gamma \Gamma^a(q, x). \tag{63}$$

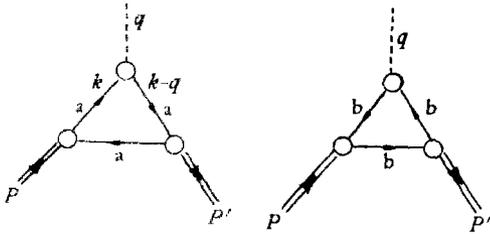


图 8 层子 a 和 b^- 与光子相互作用对电磁形状因子贡献

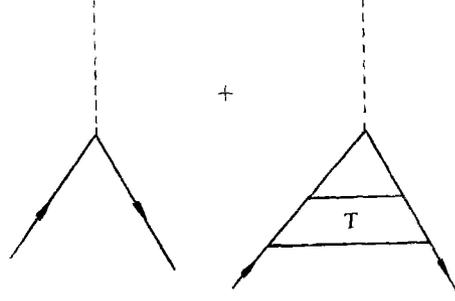


图 9 层子电磁形状因子

其中 $\Gamma^a(q, x)$ 在 $1/N$ 展开主导图近似下(见图 9).

$$\Gamma^a(q, x) = 1 - \frac{g^2 N}{\pi} \alpha_\kappa(q_-) \int dy \frac{G(q^2, y)}{(y-x)^{2\kappa}}. \quad (64)$$

式中:

$$G(q^2, y) = \sum_n \frac{\varphi_n(y) \int dy' \varphi_n(y')}{-q^2 - \mu_n^2 - i\epsilon}. \quad (65)$$

再注意到:

$$\frac{1}{P_-} \int d p_+ S_{\pm}^2(p) S_{\pm}^2(P-p) = \frac{\pi i}{4} \frac{1}{\mu^2 - H_0}, \quad (66)$$

就给出:

$$\Gamma^a(q, x) = - \left[q^2 + \frac{\mathcal{M}_a^2(x)}{x} + \frac{\mathcal{M}_b^2(1-x)}{1-x} \right] G(q^2, x). \quad (67)$$

其中: $x = \frac{q_-}{P_-}$,

$$\mathcal{M}_a^2(x) = m_a^2 - \frac{g^2 N}{\pi} \frac{\alpha_\kappa(P_-)}{2\kappa - 1} \cdot \frac{1}{x^{2\kappa-2}}. \quad (68)$$

$$\mathcal{M}_b^2(1-x) = m_b^2 - \frac{g^2 N}{\pi} \cdot \frac{\alpha_\kappa(P_-)}{2\kappa - 1} \frac{1}{(1-x)^{2\kappa-2}}. \quad (69)$$

于是得到:

$$(F_-^a)_{\beta\alpha} = 2e_a P_-^3 \left\{ \int_0^1 dy \frac{\Gamma_{\beta}^{a\bar{b}}(P, y) \Gamma^a\left(q, \frac{y}{x}\right) \Gamma_{\alpha}^{a\bar{b}}\left(P', \frac{y-x}{1-x}\right)}{\left[\mu_{\beta}^2 - \frac{\mathcal{M}_a^2(y)}{y} - \frac{\mathcal{M}_b^2(1-y)}{1-y}\right] \left[1-x - \frac{\mu_a^2}{y-x} - \frac{\mathcal{M}_b^2(1-y)}{1-y}\right]} + \int_0^x dy \frac{\Gamma_{\beta}^{a\bar{b}}(P, y) \Gamma^a\left(q, \frac{y}{x}\right) \Gamma_{\alpha}^{a\bar{b}}\left(P', \frac{y-x}{1-x}\right)}{\left[\mu_{\beta}^2 - \frac{\mathcal{M}_a^2(y)}{y} - \frac{\mathcal{M}_b^2(1-y)}{1-y}\right] \left[\frac{q^2}{x} + \frac{\mathcal{M}_a^2(y)}{y} + \frac{\mathcal{M}_b^2(x-y)}{x-y}\right]} \right\}. \quad (70)$$

其中:

$$\mathcal{M}_{a,b}^2(x-y) = m_{a,b}^2 - \frac{g^2 N}{\pi} \frac{\alpha_\kappa(P_-)}{2\kappa-1} \frac{1}{(y-x)^{2\kappa-2}} = \mathcal{M}_{a,b}^2(y-x). \quad (71)$$

式(70)若以波函数形式来表示,则记为:

$$\begin{aligned} (F_-^a)_{\beta\alpha} = & 2e_a P_- \left\{ \int_x^1 dy \varphi_{\beta\bar{\beta}}^{a\bar{b}}(P, y) \Gamma^a \left(q, \frac{y}{x} \right) \varphi_{\alpha}^{a\bar{b}} \left(P', \frac{y-x}{1-x} \right) C(\mu_a^2, y, x) \right. \\ & - \int_0^x dy \varphi_{\beta\bar{\beta}}^{a\bar{b}}(P, y) D(q^2, y, x) G \left(q^2, \frac{y}{x} \right) \\ & \left. \cdot \left[\frac{\mu_a^2}{1-x} - \frac{\mathcal{M}_a^2 \left(\frac{y-x}{1-x} \right)}{y-x} - \frac{\mathcal{M}_b^2 \left(\frac{1-y}{1-x} \right)}{1-y} \right] \varphi_{\alpha}^{a\bar{b}} \left(P', \frac{y-x}{1-x} \right) \right\}. \quad (72) \end{aligned}$$

其中:

$$C(\mu_a^2, y, x) = \left[\mu_a^2 - \frac{\mathcal{M}_a^2 \left(\frac{y-x}{1-x} \right)}{\frac{y-x}{1-x}} - \frac{\mathcal{M}_b^2 \left(\frac{1-y}{1-x} \right)}{\frac{1-y}{1-x}} \right] \left[\mu_a^2 - \frac{\mathcal{M}_a^2(y-x)}{\frac{y-x}{1-x}} - \frac{\mathcal{M}_b^2(1-y)}{\frac{1-y}{1-x}} \right]^{-1} \quad (73)$$

$$D(q^2, y, x) = \left[q^2 + \frac{\mathcal{M}_a^2 \left(\frac{y}{x} \right)}{\frac{y}{x}} + \frac{\mathcal{M}_b^2 \left(\frac{1-y}{x} \right)}{1 - \left(\frac{y}{x} \right)} \right] \left[\frac{q^2}{x} + \frac{\mathcal{M}_a^2(y)}{y} + \frac{\mathcal{M}_b^2(x-y)}{x-y} \right]^{-1}. \quad (74)$$

现在讨论方程(72)的渐近行为,考虑两个极端情况: A) 实光子 $q^2 = 0$; B) 形状因子在大 q^2 时的行为,即 $q^2 \rightarrow \infty$ (类空区域).

情况 A), 实光子 $q^2 = 0$, 选择参考系 $q_- = 0, x = 0$, 式(72)变为:

$$(F_-^a)_{\beta\alpha} = 2e_a P_- \int_0^1 dy \varphi_{\beta\bar{\beta}}^{a\bar{b}}(P, y) \varphi_{\alpha}^{a\bar{b}}(P', y) = 2e_a P_- \delta_{\beta\alpha}. \quad (75)$$

由形状因子归一条件就可以给出波函数的正交归一化条件.

情况 B), 由 $P^2 = -\mu_{\beta}^2, P'^2 = -\mu_{\alpha}^2, q = P - P'$, 可以得到:

$$\mu_{\beta}^2 = \frac{\mu_{\alpha}^2}{1-x} - \frac{q^2}{x}. \quad (76)$$

当 $q^2 \rightarrow \infty$ 时,选择参考系 $x \sim 1$, 即:

$$x \approx 1 - \frac{\mu_{\alpha}^2}{q^2}. \quad (77)$$

先将方程(72)变换为另一个形式:

$$\begin{aligned} (F_-^a)_{\beta\alpha} = & 2e_a P_- (1-x) \left\{ \int_0^1 dZ \varphi_{\beta\bar{\beta}}^{a\bar{b}}(P, x + (1-x)Z) \varphi_{\alpha}^{a\bar{b}}(Z) \right. \\ & + \frac{g^2 N}{\pi} \int_0^1 dZ \int_0^{\frac{x}{1-x}} dy \left[x(1-x)^{2\kappa-2} \varphi_{\alpha}^{a\bar{b}}(P, x - \nu(1-x)) \alpha_\kappa(P_-) \right. \\ & \left. \left. - x^{2\kappa-1} \varphi_{\beta\bar{\beta}}^{a\bar{b}}(P, x(1-x)Z) \alpha_\kappa(q) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{G(q^2, \frac{x - \nu(1-x)}{x}) \varphi_a^{ab}(P', Z)}{(1-x)^{2\kappa-1}(Z+\nu)^{2\kappa}} \right\}. \quad (78)$$

定义 Scaling 函数 ($\xi = q^2 x$),

$$\mathcal{A}^a(\xi) = \lim_{q^2 \rightarrow \infty} q^2 G\left(q^2, \frac{\xi}{q^2}\right). \quad (79)$$

将(79)代入到(78)式,考虑 $q^2 \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 1$ 时 $(F_-^a)_{\beta\alpha}$ 的渐近行为

$$\begin{aligned} (F_-^a)_{\beta\alpha} &\sim 2e_a P_- (1-x) \int_0^1 dZ \varphi_{\beta}^{ab}(P, x + (1-x)Z) \varphi_a^{ab}(P', Z) \\ &+ 2e_a P_- \frac{g^2 N}{\pi} \int_0^1 dZ \int_0^\infty d\nu \frac{\varphi_{\beta}^{ab}(P, x - \nu(1-x)) - \varphi_{\beta}^{ab}(P, x + (1-x)Z)}{(1-x)^{2\kappa-2}(Z+\nu)^{2\kappa}} \\ &\cdot \frac{x\alpha_s(P_-)}{q^2} \mathcal{A}(\nu\mu_a^2) \varphi_a^{ab}(P', Z). \end{aligned} \quad (80)$$

由于 $x \sim 1$, 用波函数的渐近形式(44)代入就可以得到:

$$(F_-^a)_{\beta\alpha} \sim A \left(\frac{\mu_a^2}{q^2}\right)^{1+\beta_b} + B \left(\frac{\mu_a^2}{q^2}\right)^{1+\beta_b-2\kappa+2}. \quad (81)$$

其中 A 和 B 是与 q^2 无关的函数. 从式(81)可以见到这里的确给出形状因子关于 q^2 的幂次行为. 注意到式(40)的限制, 可以令:

$$\beta_b = 2\kappa - 2 + \delta, \quad 0 < \delta < 1. \quad (82)$$

那么 $1 + \beta_b - 2\kappa + 2 = 1 + \delta$, 所以

$$(F_-^a)_{\beta\alpha} \sim A \left(\frac{\mu_a^2}{q^2}\right)^{1+\beta_b} + B \left(\frac{\mu_a^2}{q^2}\right)^{1+\delta}. \quad (83)$$

当 $\kappa = 1$ 时:

$$(F_-^a)_{\beta\alpha} \sim \left(\frac{\mu_a^2}{q^2}\right)^{1+\delta}. \quad (84)$$

当 $\kappa > 1$ 时, $1 + \beta_b > 1 + \delta$, 仍是(84)式所给的行为. 因此, 在 $\kappa \geq 1$ 的情况下, 介子的电磁形状因子的渐近行为都是由式(84)给出, 但是物理意义有所不同. 仔细分析式(83)的由来就可以见到式(83)的第一项来自于式(80)的第一项, 而式(83)的第二项来自于式(80)的第二项. 式(80)的第一项是层子与光子直接的裸耦合, 第二项包含有非直接的耦合, 也就是来自于“云”的影响. 当 $\kappa = 1$ 时, 直接和非直接耦合贡献相同, 可是当 $\kappa > 1$ 时, 非直接耦合占主要贡献. 这样一个物理效应也是显然的, 因为 $\kappa > 1$ 相当于交换有效胶子, 不可能直接耦合占主要贡献. 式(83)的结果与 Brodsky 和 Farrar^[13] 以及 Einhorn^[14] 的结果相当, 但物理机制是不同的.

2. 关于深度非弹过程中的结构函数.

类似于文献[9]的方法定义:

$$W_{--} \approx 4 \lim_{B_j} |(F_-^a)_{\beta\alpha(\nu)}(q^2) + (F_-^b)_{\beta\alpha(\nu)}(q^2)|^2. \quad (85)$$

B_j 是指 Bjorken 极限, $(\alpha(\nu) = \frac{1}{\pi^2} \mu_a^2)$, 在此极限下,

$$x \approx x_{Bj} \quad x_{Bj} = \frac{q^2}{2P \cdot q} \quad x = \frac{q_-}{P_-},$$

$$\mu_a^2 = -(P - q)^2 \approx 2\mu_p v(1 - x_{Bj}). \quad (86)$$

$\alpha(v)$ 相应于终态的介子质量, 相比初态 μ_p 要大得多, 因此可以考虑 $\mu_a^2 \rightarrow \infty$ 的行为. 在 $\kappa > 1$ 的情况下, 式(78)的第二项要比 $\kappa = 1$ 时更可以忽略, 同样只需考虑式(78)第一项的贡献. 对于式(78)的第一项, 由于 $\varphi(x)$ 在 $x \sim 0$ 和 $x \sim 1$ 附近是单调函数, 因此, 在 $Z \approx 1$ 的区域要比 $Z \approx 0$ 区域贡献小得多. 因此, 同样主要贡献来自于层子与虚光子的直接耦合, 从而得到

$$\lim_{Bj} v^2 W_2(q^2, v) = 2\pi^2 (e_a^2 m_a^2 \phi_\beta^2(x)^2 + e_b^2 m_b^2 \phi_\beta^2(1-x)). \quad (87)$$

当 $x \rightarrow 1$ 时

$$v^2 W_2 \sim (1-x)^{2\beta}. \quad (88)$$

式(85)与文献[9]在形式上相同, 表明这一形式不依赖于 κ 值, 即表明由于红外不稳定产生的长程力对于深度非弹过程中的影响不改变幂次形式 $(1-x)^{2\beta}$, 这是可理解的, 因为深度非弹过程中主要是短程行为. 注意到式(40), 我们有

$$4(\kappa - 1) < 2\beta < 2(2\kappa - 1). \quad (89)$$

目前实验上给出电子-质子非弹散射情况下有 $vW_2 \sim (1-x)^3 - (1-x)^4$, 如果电子-介子深度非弹过程中也有此幂次关系, 看来 κ 不能大于 2. 还有一点值得注意, 比较式(84)和(88)可知, 仅在 $\kappa = 1$ 时满足 Drell-Yan-West^[14] 关系以及 Bloom-Gilman^[15] 关系. 然而在 $\kappa > 1$ 时, 两个关系都不满足. 这些特点是否正确, 目前实验上还不能给予判断. 同时, 这里只是二维模型, 真实模型是四维的, 这些定性的和半定量的特点是否在四维模型中保持, 还有待深入研究.

参 考 文 献

- [1] M. Han, Y. Nambu, *Phys. Rev.*, **B139** (1965), 1006.
- [2] 刘耀阳, 原子能, **3**(1966), 232.
- [3] 李宗、卞震、习成, 物理学报, **24** (1975), 372.
- [4] D. J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev.*, **D8** (1973), 3633.
- [5] E. C. Poggio, *Phys. Letters*, **B68** (1977), 347.
- [6] Chiat et al., *Phys. Rev.*, **D6** (1972), 3543.
- [7] 't Hooft, *Nuclear Physics*, **B72** (1974), 461; **B75** (1974), 461.
- [8] C. G. Callen et al., *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 1649.
- [9] M. B. Einhorn, *Phys. Rev.*, **D14** (1976), 3541.
- [10] 这方面文章很多, 例如: M. B. Einhorn, et al., *Phys. Rev.*, **D15** (1977), 2282; R. C. Brower et al., *Nuclear Physics*, **B128** (1977), 131; R. C. Brower et al., *Phys. Rev. Letters*, **40** (1978), 674; C. S. Lan, T. M. Yan, *Physics Letters*, **B71** (1977), 173; M. Fukugita et al., *Physics Letters*, **B72** (1977), 237; H. Fritzsch et al., *Physics Letters*, **B69** (1977), 316; G. Sterman, S. Weinberg, *Phys. Rev. Letters*, **39** (1977), 1436.
- [11] E. C. Poggio, *Phys. Rev.*, **D16** (1977), 2586.
- [12] C. Alalico and G. Schierholz, *Nuclear Physics*, **B126** (1977), 416.
- [13] S. J. Brodsky and G. R. Farrar, *Phys. Rev.*, **D11** (1975), 1309.
- [14] S. D. Dreel and T. M. Yan, *Phys. Rev. Letters*, **24** (1970), 181; G. B. West, *Phys. Rev. Letters*, **24** (1970), 1206.
- [15] E. D. Bloom and F. J. Gilman, *Phys. Rev.*, **D4** (1971), 2901.

THE INFRARED STRUCTURE AND THE ELECTROMAGNETIC FORM FACTORS OF QUANTUM CHROMODYNAMICS IN TWO DIMENSIONS

HUANG TAO XUE PEI-YOU

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

We discuss a model of quantum chromodynamics in $1+1$ dimension. Using 't Hooft's $1/N$ expansion and considering the effects of the infrared structure in non-Abelian gauge theories by assuming that the coupling $g^2(t) \sim 1/t^{\kappa-1}$, the Straton's Propagator and the Bethe-Salpeter equation of mesons are obtained; the properties of the meson wave functions and their characteristics are also discussed. From the behaviour of the electromagnetic form factors and the deep inelastic scattering structure functions obtained, it follows that $\kappa \leq 2$.