第2卷 第2期 1978年3月
高能物理与核物理
PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS
Vol. 2, No. 2 March 1978

原子核多体问题的玻色子-费米子描述

杨泽森 钟毓澍 齐辉 杨立铭
(北京大学物理系)

摘 要

本文建立了一种在处理原子核多体问题时可以灵活地采用玻色变数与费米变数的理论形式，它原则上允许应用于与原来的费米型态空间等价的任何一个物理态空间. 文中借助于玻色子和费米子产生湮没算符之间通常的对易反对易关系式，构成一个广义态空间，再从中建立与原来的费米型态空间等价的物理子空间系列，给出了各个不同的等价物理子空间之间的变换关系，并求出各类算符在这种子空间中的等效算符.

引 言

近年来，原子核元激发的观点有了新的发展，特别是 Bohr-Mottelson 等人，试图从一些简单的费米型和玻色型元激发出发，选择一些低级的耦合项，规定构成费曼图的基本规则，以此对原子核的低激发态性质进行系统的描述[1-3].

如所周知，在发展纯玻色型元激发的理论时，首先是直接根据从实验现象辨认出来的集体自由度，建立起半唯象的理论. 另一方面又可以与一般的玻色子展开理论结合起来，从微观或半微观的途径进行工作.

类似地，在发展包括玻色型和费米型元激发及其耦合的理论时，也可以把半唯象的途径与玻色子展开理论的适当的推广形式结合起来，进行研究. 本文的工作就是沿着这样的方向进行的. 第一步是建立我们所需要的玻色子展开理论的推广形式. 这种理论形式应当允许灵活地采用费米变数和玻色变数，又与原来的费米描述完全等价.

Marshalek[4] 曾把 Beliaev-Zelevinsky[5] 的玻色子展开方法推广一步，使物理态空间中，除了玻色子成分之外，还包括带有一个费米子(或空穴)的成分.

这种推广形式，或者再进一步，推广到态空间包括纯玻色子态和带有 k 个费米子(或空穴)的情形，对于我们的目的来说，还是不够的，为了能够与当前的半唯象理论相应，原则上要允许采用与原来的费米型态空间等价的任何一个物理态空间，并且能够实行不同空间之间的变换. 为此，我们首先在第一节中，借助于玻色子及费米子产生湮没算符之间通常的对易反对易关系式，构成一个广义态空间，再从中建立与原来的纯费米型态空间等价的物理子空间系列. 在第二节至第四节，将建立不同的等价物理子空间之间的变换关

本文 1977 年 9 月 21 日收到.

系，并求出原来的费米型态空间的算符在这种物理子空间中的等效算符.

在第二节中引进的，关于原来的费米型态空间与新的物理子空间之间的变换算符，是本文的基本工具，它们可以看作是 T. Usui[6] 和T. Marumori[7] 等人在建立玻色子展开理论时采用的变换算符的推广.

一、广义态空间及物理子空间

为了能够灵活使用玻色变数和费米变数，我们把态空间加以扩充，并在其中建立物理子空间.

设在原来的态空间中(扩充前)，粒子或空穴的产生、湮灭算符为 ξ_μ^+ 及 ξ_μ，$|0\rangle$ 为相应的裸粒子-空穴真空态. 于是:

$$\left.\begin{aligned} \xi_\mu\xi_\nu^+ + \xi_\nu^+\xi_\mu &= \delta_{\mu\nu} \\ \xi_\mu\xi_\nu + \xi_\nu\xi_\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

$$\xi_\mu|0\rangle = 0 \tag{1.2}$$

扩充后的态空间，由费米子算符、玻色子算符以及裸费米-玻色真空描写. 设粒子或空穴的产生、湮灭算符为 β_μ^+ 及 β_μ，裸玻色子的产生、湮灭算符为 $b_{\mu\nu}^+$ 及 $b_{\mu\nu}$，而 $b_{\mu\nu}=-b_{\nu\mu}$，这些算符之间的对易关系和反对易关系如下:

$$\begin{aligned} &\beta_\mu\beta_\nu^+ + \beta_\nu^+\beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \\ &\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu = 0 \\ &b_{\mu\nu}b_{\mu'\nu'}^+ - b_{\mu'\nu'}^+b_{\mu\nu} = \delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} - \delta_{\mu\nu'}\delta_{\nu\mu'} \\ &b_{\mu\nu}b_{\mu'\nu'} - b_{\mu'\nu'}b_{\mu\nu} = 0 \\ &b_{\mu\nu}\beta_{\nu'} - \beta_{\nu'}b_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}\beta_{\nu'}^+ - \beta_{\nu'}^+b_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

广义态空间的裸真空态记为 $|0)$，它具有如下性质:

$$\begin{aligned} \beta_\mu|0) &= 0 \\ b_{\mu\nu}|0) &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

现在说明广义态空间中的物理子空间的概念.

显然，广义态空间中的整个纯费米子空间等价于原来的态空间. 因此，这样的纯费米子空间就是一个物理子空间. 可以认为，它是由如下形式的基矢张成的:

$$\beta_{\mu_1}^+\beta_{\mu_2}^+\cdots\cdots\beta_{\mu_k}^+|0). \tag{1.5}$$

我们将说，一个形如(1.5)的态矢量等价于原来态空间中的对应态矢量 $\xi_{\mu_1}^+\xi_{\mu_2}^+\cdots\xi_{\mu_k}^+|0\rangle$.

其次，考虑广义态空间中如下形式的态矢量:

$$|\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m};\ \mu_{2m+1}\cdots\mu_k) = \sqrt{\frac{(2m)!!(k-2m)!}{k!}}\sum_S{}'(-1)^{[S]}Sb_{\mu_1\mu_2}^+b_{\mu_3\mu_4}^+\cdots b_{\mu_{2m-1}\mu_{2m}}^+\beta_{\mu_{2m+1}}^+\cdots\beta_{\mu_k}^+|0) \tag{1.6}$$

出现在右端的 S 代表对于指标 $\mu_1\mu_2\cdots\mu_k$ 进行置换的算符，求和号上的撇号表示不包含重复的项，$(-1)^{[S]}$表示置换 S 的奇偶性. 前面的常系数是为了态矢量归一化. 在这样的态矢量中，虽然同时出现费米子算符和玻色子算符，但仍然满足泡利原理. 当 $m=0$ 时，(1.6) 式变为 (1.5) 式，当 $m\neq 0$ 时，(1.6) 式与 (1.5) 式给出的态矢量是互相正交的. 但

是我们必须认为，当m取 0 与 $\bar{m}$ 之间的一切整数值时 $\left(\bar{m}=\frac{k}{2}-\frac{1-(-1)^k}{4}\right)$，由 (1.6) 式给出的所有态矢量都是互相等价的.

对纯费米子空间的基矢(1.5)作任何的等价替换，都得到另一组与 (1.5) 等价的基矢，它们张成一个与纯费米子空间等价的物理子空间. 这样定义的每个物理子空间都将称为完全的，因为它与原来的整个态空间等价.

二、变 换 算 符

首先，考虑如下的 u 算符:

$$u_{mn}=k_{mn}\langle 0|\left(\sum_{\mu\nu} b^+_{\mu\nu}\xi_\nu\xi_\mu\right)^m\left(\sum_{\mu'}\beta^+_{\mu'}\xi_{\mu'}\right)^n|0)$$

$$u^+_{mn}=k_{mn}(0|\left(\sum_{\mu'}\beta_{\mu'}\xi^+_{\mu'}\right)^n\left(\sum_{\mu\nu} b_{\mu\nu}\xi^+_\mu\xi^+_\nu\right)^m|0\rangle \tag{2.1}$$

显然，当 u_{mn} 算符作用于原来态空间中的态矢量 $\xi^+_{\mu_1}\xi^+_{\mu_2}\cdots\xi^+_{\mu_{2m+n}}|0\rangle$ 时，将会得到广义态空间中形如 (1.6) 的态矢量，而 u^+_{mn} 则可用来实现相反的变换. 实系数 k_{mn} 用来保持态矢量的归一系数不变. 直接的计算给出:

$$u_{mn}\xi^+_{\mu_1}\xi^+_{\mu_2}\cdots\xi^+_{\mu_{2m+n}}|0\rangle$$
$$=k_{mn}\sqrt{(2m)!!n!(2m+n)!}\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m};\ \mu_{2m+1}\cdots\mu_{2m+n})$$
$$u^+_{mn}|\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m};\ \mu_{2m+1}\cdots\mu_{2m+n})$$
$$=k_{mn}\sqrt{(2m)!!n!(2m+n)!}\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\xi^+_{\mu_1}\xi^+_{\mu_2}\cdots\xi^+_{\mu_{2m+n}}|0\rangle$$

因此我们选取如下的 k_{mn}:

$$k_{mn}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{(2m)!!n!(2m+n)!}} \tag{2.2}$$

为了能够对任意的态矢量实行变换，我们把所有的 u_{mn} 算符加起来:

$$U=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{mn}$$

$$U^+=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u^+_{mn} \tag{2.3}$$

即

$$U=\sum_{m,n}k_{mn}\langle 0|\left(\sum_{\mu\nu} b^+_{\mu\nu}\xi_\nu\xi_\mu\right)^m\left(\sum_{\mu'}\beta^+_{\mu'}\xi_{\mu'}\right)^n|0)$$

$$U^+=\sum_{m,n}k_{mn}(0|\left(\sum_{\mu'}\beta_{\mu'}\xi^+_{\mu'}\right)^n\left(\sum_{\mu\nu} b_{\mu\nu}\xi^+_\mu\xi^+_\nu\right)^m|0\rangle \tag{2.4}$$

根据前面的讨论可知，广义态空间任一物理子空间的态矢量，被 U^+ 算符作用后，将变成原来态空间中的等价态矢量，而原来空间的一个态矢量被U作用后，则变成它在广义态空间中的一切等价态矢量之和. 例如:

$$U^+|\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m};\mu_{2m+1}\cdots\mu_k)=\xi^+_{\mu_1}\xi^+_{\mu_2}\cdots\xi^+_{\mu_k}|0\rangle \tag{2.5}$$

$$U\xi^+_{\mu_1}\xi^+_{\mu_2}\cdots\xi^+_{\mu_k}|0\rangle=\sum_{m=0}^{\bar{m}}|\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m};\mu_{2m+1}\cdots\mu_k) \tag{2.6}$$

其中

$$\bar{m}=\frac{k}{2}-\frac{1-(-1)^k}{4}. \tag{2.7}$$

现在，从广义态空间中，任取一个完全的物理子空间 Q. 为了简便起见，我们同时用 Q 来代表这个物理子空间的投影算符. 当我们以 Q 算符作用于(2.6)式两端时，右端只剩下一项. 因此，借助于如下的 U 算符，可使原来的态空间与子空间 Q 的等价态矢量一一地对应起来：

$$\begin{aligned} U_Q &= QU \\ U_Q^+ &= U^+Q \end{aligned} \tag{2.8}$$

设 $\{|f\rangle\}$ 为原来态空间的一套正交归一基矢，$\{U_Q|f\rangle\}$ 则为广义态空间中子空间 Q 的一套正交归一的基矢. 令

$$|f)_Q = U_Q|f\rangle \tag{2.9}$$

于是

$$U_Q = \sum_f |f)_Q\langle f|$$

$$U_Q^+ = \sum_f |f\rangle_Q(f| \tag{2.10}$$

故

$$U_Q^+U_Q = U^+QU = \sum_f |f\rangle\langle f| \tag{2.11}$$

$$U_QU_Q^+ = QUU^+Q = \sum_f |f)_{QQ}(f| = Q \tag{2.12}$$

这就是说，$U_Q^+U_Q$ 在原来的态空间中等于 1，而 $U_QU_Q^+$ 在子空间 Q 中等于 1.

算符 U_Q 及 U_Q^+ 可以看作 T. Usui[6] 和 T. Marumori[7] 等人在建立玻色子展开理论时采用的变换算符的推广.

借助 U 算符，可以建立广义态空间中的一种重要的变换算符 P：

$$P = P^+ = UU^+ \tag{2.13}$$

显然

$$QPQ = Q \tag{2.14}$$

$$PQU = U$$

$$U^+QP = U^+ \tag{2.15}$$

$$PQP = P \tag{2.16}$$

根据 U 和 U^+ 的性质可知，一个物理子空间的任一个态矢量，被 P 算符作用后，将变成一切等价态矢量之和. 例如，以 U 作用于(2.5)式，并注意(2.6)，有：

$$P|\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m};\ \mu_{2m+1}\cdots\mu_k) = \sum_{m'=0}^{\bar{m}} |\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m'};\ \mu_{2m'+1}\cdots\mu_k) \tag{2.17}$$

通过 P 算符与投影算符的积，还可以建立广义态空间中另一种变换算符，而把任何两个完全物理子空间的等价态矢量一一对应起来. 关于子空间 Q 与 Q' 的变换算符为：

$$P_{QQ'} = U_QU_{Q'}^+ = QPQ' \tag{2.18}$$

$$P_{Q'Q} = U_{Q'}U_Q^+ = P_{QQ'}^+ = Q'PQ \tag{2.19}$$

设 Q'' 为另一个物理子空间，则显然有：

$$P_{QQ'}P_{Q'Q''} = QPQ'PQ'' = QPQ'' = P_{QQ''} \tag{2.20}$$

最后，引入如下的算符 n, N 及 D，可把 U 的表达式写得简便些：

$$n = \sum_{\mu} \beta_\mu^+ \beta_\mu$$

$$N = \sum_{\mu\nu} b_{\mu\nu}^+ b_{\mu\nu} \tag{2.21}$$

$$D = e^{\sum_{\mu'} \beta_{\mu'}\xi_{\mu'}^+ + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} b_{\mu\nu}\xi_\mu^+\xi_\nu^+} \tag{2.22}$$

$$U = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sqrt{\frac{n!N!!}{(N+n)!}} \langle 0|D^+|0\rangle$$

$$U^+ = \langle 0|D|0\rangle \sqrt{\frac{n!N!!}{(n+N)!}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{2.23}$$

注意：

$$n\beta_\mu^+|0\rangle = \beta_\mu^+|0\rangle$$

$$Nb_{\mu\nu}^+|0\rangle = 2b_{\mu\nu}^+|0\rangle \tag{2.24}$$

三、若干变换式

通过直接验算可证明下列关系式：

$$e^{-\sum_{\mu'} \beta_{\mu'}^+\xi_{\mu'}}|0\rangle = (-1)^n e^{\sum_{\mu'} \beta_{\mu'}^+\xi_{\mu'}}|0\rangle \tag{3.1}$$

$$\xi_\mu e^{\sum_{\mu'} \beta_{\mu'}^+\xi_{\mu'}}|0\rangle = \beta_\mu e^{\sum_{\mu'} \beta_{\mu'}^+\xi_{\mu'}}|0\rangle$$

$$\langle 0|e^{\sum_{\mu'} \beta_{\mu'}\xi_{\mu'}^+}(\xi_\mu^+) = \langle 0|e^{\sum_{\mu'} \beta_{\mu'}\xi_{\mu'}^+}(\beta_\mu^+) \tag{3.2}$$

$$\xi_\mu\xi_\nu D^+|0\rangle = \beta_\mu\beta_\nu D^+|0\rangle = b_{\nu\mu}D^+|0\rangle$$

$$\langle 0|D\xi_\mu^+\xi_\nu^+ = \langle 0|D\beta_\mu^+\beta_\nu^+ = \langle 0|Db_{\mu\nu}^+ \tag{3.3}$$

$$\xi_\mu D|0\rangle = \left(\beta_\mu + \sum_\nu b_{\mu\nu}\xi_\nu^+\right) D|0\rangle$$

$$\langle 0|D^+\xi_\mu^+ = \langle 0|D^+\left(\beta_\mu^+ + \sum_\nu b_{\mu\nu}^+\xi_\nu\right) \tag{3.4}$$

由 (3.1) (3.2) 及 (3.4) 可直接求出 ξ_μ^+ 及 ξ_μ 在 U 变换下的表达式：

$$U\xi_\mu^+U^+ = P\{\xi_\mu^+\}_R = \{\xi_\mu^+\}_L P \tag{3.5}$$

$$U\xi_\mu U^+ = P\{\xi_\mu\}_R = \{\xi_\mu\}_L P \tag{3.6}$$

其中

$$\{\xi_\mu^+\}_R = \beta_\mu^+ \sqrt{\frac{N+n+1}{n+1}} \tag{3.7}$$

$$\{\xi_\mu^+\}_L = \beta_\mu^+ \sqrt{\frac{n+1}{N+n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_\nu b_{\mu\nu}^+\beta_\nu \sqrt{\frac{N+2}{N+n+1}} \tag{3.8}$$

$$\{\xi_\mu\}_R=\{\xi_\mu^+\}_L^+=\sqrt{\frac{n+1}{N+n+1}}\beta_\mu+\sqrt{\frac{N+2}{N+n+1}}\sum_\nu\beta_\nu^+b_{\mu\nu}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\tag{3.9}$$

$$\{\xi_\mu\}_L=\{\xi_\mu^+\}_R^+=\sqrt{\frac{N+n+1}{n+1}}\beta_\mu\tag{3.10}$$

由(3.3)式有

$$P\beta_\mu^+\beta_\nu^+\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}=Pb_{\mu\nu}^+\frac{1}{\sqrt{N+2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\beta_\mu\beta_\nu P=\frac{1}{\sqrt{N+2}}b_{\nu\mu}P\tag{3.11}$$

借助(2.11)及(2.12)式,可利用(3.7)—(3.10)构成ξ^+与ξ的各种积的变换式. 设算符积$q_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}$中, 每个$q$算符代表$\xi^+$或$\xi$, 在$U$变换下有:

$$\begin{aligned}Uq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}U^+&=Uq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_{k-1}}U^+QUq_{\mu_k}U^+\\&=Uq_{\mu_1}U^+QUq_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}U^+\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}Uq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}U^+&=Uq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_{k-1}}U^+\{q_{\mu_k}\}_R\\&=\{q_{\mu_1}\}_LUq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}U^+\end{aligned}\tag{3.12}$$

由此递推下去,当UU^+出现在最左端或最右端,或者出现在某个中间位置时有:

$$\begin{aligned}Uq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}U^+&=P\{q_{\mu_1}\}_R\{q_{\mu_2}\}_R\cdots\{q_{\mu_k}\}_R\\&=\{q_{\mu_1}\}_L\{q_{\mu_2}\}_L\cdots\{q_{\mu_k}\}_LP\\&=\{q_{\mu_1}\}_L\{q_{\mu_2}\}_L\cdots\{q_{\mu_l}\}_LP\{q_{\mu_{l+1}}\}_R\cdots\{q_{\mu_k}\}_R\end{aligned}\tag{3.13}$$

也可以借助(2.11)式把$Uq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}U^+$分解为由$Q$算符隔开的若干个因子，每个因子都可以采用以上任何一类表达式. 例如:

$$\begin{aligned}Uq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}U^+&=Uq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_l}U^+QUq_{\mu_{l+1}}\cdots q_{\mu_k}U^+\\&=Uq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_l}U^+QUq_{\mu_{l+1}}\cdots q_{\mu_\lambda}U^+Q'Uq_{\mu_{\lambda+1}}\cdots q_{\mu_k}U^+\\&=\cdots\end{aligned}\tag{3.14}$$

此外,还可以利用(3.11)式改写以上各个变换式.

顺便北出,由(3.13)式可得到如下的推论:

$$U\xi_{\mu_1}^+\xi_{\mu_2}^+\cdots\xi_{\mu_k}^+|0\rangle=\{\xi_{\mu_1}^+\}_L\{\xi_{\mu_2}^+\}_L\cdots\{\xi_{\mu_k}^+\}_L|0)\tag{3.15}$$

再利用(2.6)式有:

$$\{\xi_{\mu_1}^+\}_L\{\xi_{\mu_2}^+\}_L\cdots\{\xi_{\mu_k}^+\}_L|0)=\sum_{m=0}^{m}|\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m};\ \mu_{2m+1}\cdots\mu_k)\tag{3.16}$$

四、Q子空间中的等效算符

与前面一样,设Q代表广义态空间的一个完全物理子空间,原来的态空间中的任一算符g的矩阵元$\langle f|g|f'\rangle$可以表示为Q子空间的一个等效算符g_Q的矩阵元${}_Q(f|g_Q|f')_Q$:

$$\langle f|g|f'\rangle=\langle f|U_Q^+U_QgU_Q^+U_Q|f'\rangle={}_Q(f|U_QgU_Q^+|f')_Q\tag{4.1}$$

因此，g 在 Q 子空间中的等效算符为

$$g_Q = U_Q g U_Q^+ = QUgU^+Q \tag{4.2}$$

显然

$$g_Q^+ = (g^+)_Q \tag{4.3}$$

$$(gh)_Q = g_Q h_Q \tag{4.4}$$

其中 h 也代表原来态空间的任意算符.

ξ_μ^+ 或 ξ_μ 的等效算符，可根据 (3.5) 及 (3.6) 式直接得出：

$$(\xi_\mu^+)_Q = QP\{\xi_\mu^+\}_R Q = Q\{\xi_\mu^+\}_L PQ \tag{4.5}$$

$$(\xi_\mu)_Q = QP\{\xi_\mu\}_R Q = Q\{\xi_\mu\}_L PQ \tag{4.6}$$

由于 U^+QU 在原来态空间中等于 1，使得结合律 (4.4) 成立，我们可以通过 $\{\xi_\mu^+\}_R$，$\{\xi_\mu^+\}_L$，$\{\xi_\nu\}_R$ 及 $\{\xi_\nu\}_L$ 的积来表示 $q_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}$ 的等效算符. 为此，只需在上节所给 $Uq_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}U^+$ 的表达式中左乘和右乘投影算符 Q. 例如：

$$\begin{aligned}(q_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k})_Q &= QP\{q_{\mu_1}\}_R\{q_{\mu_2}\}_R\cdots\{q_{\mu_k}\}_R Q \\ &= Q\{q_{\mu_1}\}_L\{q_{\mu_2}\}_L\cdots\{q_{\mu_k}\}_L PQ \\ &= Q\{q_{\mu_1}\}_L\{q_{\mu_2}\}_L\cdots\{q_{\mu_l}\}_L P\{q_{\mu_{l+1}}\}_R\cdots\{q_{\mu_k}\}Q \\ &= QP\{q_{\mu_1}\}_R\{q_{\mu_2}\}_R\cdots\{q_{\mu_l}\}_R Q\{q_{\mu_{l+1}}\}_L\cdots\{q_{\mu_k}\}_L PQ\end{aligned} \tag{4.7}$$

也可借助结合律(4.4)把 $(q_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k})_Q$ 分解为若干个因子，每个因子都可采用(4.7)中任一种表达式，这点与上节讨论的 U 变换式的情况是类似的. 同样，现在也可用 (3.11) 来改写等效算符的各个表达式.

我们看到，在等效算符的表达式中，含有 P 算符. 以(4.7)的第一式为例，当它向右作用于 Q 子空间的态矢量时，首先施行 $\{q_{\mu_k}\}_R$，$\{q_{\mu_{k-1}}\}_R\cdots$ 等算符的运算，这样得到的结果已经不完全满足泡利原理，但经过 P 算符作用后，变成了满足泡利原理的一系列互相等价的态矢量之和，然后再经过 Q 的作用而挑选出 Q 子空间的成分. 如果把(4.7)的第二式向右作用于 Q 子空间，则态矢量首先被 P 算符所扩充，接着受 $\{q_{\mu_k}\}_L$，$\{q_{\mu_{k-1}}\}_L$ 等作用，这时也不完全满足泡利原理了. 最后经过 Q 算符的作用而投影到 Q 子空间.

下面写出几种简单的等效算符的某些特定形式.

$$(\xi_\mu^+\xi_\nu)_Q = QP\left(\beta_\mu^+\beta_\nu + \sum_\lambda b_{\mu\lambda}^+ b_{\nu\lambda}\right)Q = Q\left(\beta_\mu^+\beta_\nu + \sum_\lambda b_{\mu\lambda}^+ b_{\nu\lambda}\right)PQ \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}(\xi_\mu^+\xi_\nu^+)_Q &= QP\beta_\mu^+\beta_\nu^+\sqrt{\frac{(N+n+1)(N+n+2)}{(n+1)(n+2)}}\,Q \\ &= QPb_{\mu\nu}^+\sqrt{\frac{(N+n+1)(N+n+2)}{N+2}}\,Q \\ &= Q\left\{\beta_\mu^+\beta_\nu^+\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{N+2}} + b_{\mu\nu}^+ - \sum_{\gamma\gamma'} b_{\mu\gamma}^+ b_{\nu\gamma'}^+ b_{\gamma\gamma'}\right. \\ &\quad \left. + \sum_\gamma b_{\nu\gamma}^+\beta_\mu^+\beta_\gamma - \sum_\gamma b_{\mu\gamma}^+\beta_\nu^+\beta_\gamma\right\}\sqrt{\frac{N+2}{(N+n+1)(N+n+2)}}\,PQ\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$(\xi_\mu\xi_\nu)_Q = (\xi_\nu^+\xi_\mu^+)_Q^+$$

$$
\begin{aligned}
&= QP\sqrt{\frac{N+2}{(N+n+1)(N+n+2)}}\left\{\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{N+2}}\beta_\mu\beta_\nu - b_{\mu\nu}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{\gamma\gamma'} b^+_{\gamma\gamma'} b_{\mu\gamma} b_{\nu\gamma'} - \sum_\gamma \beta^+_\gamma \beta_\mu b_{\nu\gamma} + \sum_\gamma \beta^+_\gamma \beta_\nu b_{\mu\gamma}\right\} Q \\
&= Q\sqrt{\frac{(N+n+1)(N+n+2)}{N+2}}\, b_{\nu\mu} PQ \\
&= Q\sqrt{\frac{(N+n+1)(N+n+2)}{(n+1)(n+2)}}\,\beta_\mu\beta_\nu PQ
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
(\xi^+_{\mu_1}\xi^+_{\mu_2}\xi_{\nu_1}\xi_{\nu_2})_Q &= QP\left\{\beta^+_{\mu}\,\beta^+_{\mu_2}\beta_{\nu_1}\beta_{\nu_2} - b^+_{\mu_1\mu_2} b_{\nu_1\nu_2} + b^+_{\mu_1\mu_2}\sum_{\gamma\gamma'} b^+_{\gamma\gamma'} b_{\nu_1\gamma} b_{\nu_2\gamma'}\right. \\
&\quad \left. - b^+_{\mu_1\mu_2}\sum_\gamma \beta^+_\gamma \beta_{\nu_1} b_{\nu_2\gamma} + b^+_{\mu_1\mu_2}\sum_\gamma \beta^+_\gamma \beta_{\nu_2} b_{\nu_1\gamma}\right\} Q \\
&= Q\left\{\beta^+_{\mu_1}\beta^+_{\mu}\,\beta_{\nu_1}\beta_{\nu_2} - b^+_{\mu_1\mu_2} b_{\nu_1\nu_2} + \sum_{\gamma\gamma'} b^+_{\mu_1\gamma} b^+_{\mu_2\gamma'} b_{\gamma\gamma'} b_{\nu_1\nu_2}\right. \\
&\quad \left. + \sum_\gamma b^+_{\mu_1\gamma}\beta^+_{\mu}\beta_\gamma b_{\nu_1\nu_2} - \sum_\gamma b^+_{\mu_2\gamma}\beta^+_{\mu_1}\beta_\gamma b_{\nu_1\nu_2}\right\} PQ
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

$$
(\xi^+_{\mu_1}\xi^+_{\mu_2}\xi^+_{\mu_3}\xi^+_{\mu_4})_Q = QP\left(b^+_{\mu_1\mu_2}\beta^+_{\mu_3}\beta_\nu + \sum_\lambda b^+_{\mu_1\mu_2} b^+_{\mu_3\lambda} b_{\nu\lambda}\sqrt{\frac{(N+n+1)(N+n+2)}{N+2}}\, Q\right. \tag{4.12}
$$

$$
(\xi^+_{\mu_1}\xi^+_{\mu_2}\xi^+_{\mu_3}\xi^+_{\mu_4})_Q = QP b^+_{\mu_1\mu_2} b^+_{\mu_3\mu_4}\sqrt{\frac{(N+n+1)(N+n+2)(N+n+3)(N+n+4)}{(N+2)(N+4)}}\, Q \tag{4.13}
$$

在以上的讨论中，Q 可以是任何一种完全物理子空间．如果 Q 满足某些特殊的规定，则等效算符的某些特定形式可以作进一步的简化．例如，如果规定，Q 中具有一个确定 k 值的形如 (1.6) 的所有态矢量，都具有相同的 m 值，那么，(4.8) 及 (4.11) 各式中的 P 算符就可以换成 1．一般地说，当 $q_{\mu_1}q_{\mu_2}\cdots q_{\mu_k}$ 与 $\sum_\mu \xi^+_\mu\xi_\mu$ 对易时，在它的等效算符的表达式中总是存在一类特殊形式 $QPAQ$ 或 $QBPQ$，其中 A 或 B 与算符 n 对易又与 N 对易，如果子空间 Q 符合这里所说的规定，则 $QPAQ = QAQ$，$QBPQ = QBQ$．为了证明这一点，考虑 $QPAQ$ 作用于 Q 子空间态矢量 $|\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m};\ \mu_{2m+1}\cdots\mu_k)$ 的结果．在 Q 作用后没有改变．当 A 作用后，玻色指标数目及总指标数目都不变，故把 $AQ|\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m};\ \mu_{2m+1}\cdots\mu_k)$ 反对称化之后仍然是 Q 子空间中的态矢量，注意 P 算符兼有反对称化的作用．因此 $QPAQ$ 可以改写为 $QPQAQ$，这就导致我们所要证明的结论．

如果我们令 Q 代表 Marshalek[4] 的子空间，即每一个形如(1.6)的态矢量都具有 $2\overline{m} = k - \frac{1-(-1)^k}{2}$ 的玻色指标，则在 (4.8)—(4.13) 各式中，除了 (4.9) 的第一式及 (4.10) 的第三式以外，都可把 P 算符换成 1．并且，在 (4.9) 第三式中的 $\beta^+_\mu\beta^+_\nu$ 项，(4.10) 第一式中的 $\beta_\mu\beta_\nu$ 项以及 (4.11) 式中的 $\beta^+_{\mu_1}\beta^+_{\mu_2}\beta_{\nu_1}\beta_{\nu_2}$ 项都不起作用，可换成 0．

在下一节，将会看到在另一种子空间中改写等效算符的例子．

五、例　子

现在，以一个简化模型为例[3]，选取特定的子空间，写出哈密顿量算符．在这个简化模型中，单粒子能级只有两条，由 $\sigma=\pm1$ 来标记．每条能级都是 2Ω 度简并的．"真空态" $|0\rangle$ 表示 $\sigma=-1$ 的能级已被填满，而 $\sigma=+1$ 的能级完全没有粒子．$\xi^+_{m\sigma}$ 代表粒子或空穴的产生算符，其中 m 为简并指标，$m\sigma$ 就是前面的 μ．$\xi^+_{m1}|0\rangle$ 表示一个粒子处于 $(m1)$ 态，$\xi^+_{m-1}|0\rangle$ 表示一个空穴处在 $(m-1)$ 态．$\xi_{m1}|0\rangle=\xi_{m-1}|0\rangle=0$．

按照 [3] 的写法，哈密顿量为：

$$H=\frac{1}{2}\epsilon\sum_m(\xi^+_{m1}\xi_{m1}-\xi_{m-1}\xi^+_{m-1})-V\Omega(A^+_1A_1+A_1A^+_1) \tag{5.1}$$

其中 ϵ 代表两条单粒子能级之间的距离，V 代表相互作用强度．A^+_1 是如下的算符：

$$A^+_1=\frac{1}{\sqrt{2\Omega}}\sum_m\xi^+_{m1}\xi^+_{m-1}. \tag{5.2}$$

把 $|0\rangle$ 态的能量当作零点，并令 $e=\frac{1}{2}(\epsilon+V)$，则哈密顿量改写为：

$$\bar H=e\sum_{m\sigma}\xi^+_{m\sigma}\xi_{m\sigma}-V\sum_{mm'}\xi^+_{m1}\xi^+_{m-1}\xi_{m'-1}\xi_{m'1} \tag{5.3}$$

根据 (4.8) 及 (4.11) 式，可把 $\bar H$ 在物理子空间 Q 中的等效算符写成：

$$\bar H_Q=QP\mathscr{H}_1Q=Q\mathscr{H}^+_1PQ \tag{5.4}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_1=h_0+U^{(2)}&+V\left(\sum_m b^+_{m1,m-1}\right)\left(\sum_{m'\mu}\beta^+_\mu\beta_{m'-1}b_{m'1,\mu}\right)\\&+V\left(\sum_m b^+_{m1,m-1}\right)\left(\sum_{m'\mu}\beta^+_\mu\beta_{m'1}b_{\mu,m'-1}\right)\\&+V\left(\sum_m b^+_{m1,m-1}\right)\left(\sum_{m'\mu\nu}b^+_{\mu\nu}b_{\mu,m'-1}b_{m'1,\nu}\right)\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$U^{(2)}=-V\sum_{mm'}\beta^+_{m1}\beta^+_{m-1}\beta_{m'-1}\beta_{m'1} \tag{5.6}$$

$$h_0=e\left(\sum_{m\sigma}\beta^+_{m\sigma}\beta_{m\sigma}+\sum_{\mu\nu}b^+_{\mu\nu}b_{\mu\nu}\right)-V\left(\sum_m b^+_{m1,m-1}\right)\left(\sum_{m'}b_{m'1,m'-1}\right) \tag{5.7}$$

现在，我们试选取一个与 [3] 最接近的子空间．为了方便，把原来态空间的基矢写成如下形式：

$$\xi^+_{m_11}\xi^+_{m_1-1}\cdots\xi^+_{m_l1}\xi^+_{m_l-1}\xi^+_{m'_11}\cdots\xi^+_{m'_k1}\xi^+_{m''_1-1}\cdots\xi^+_{m''_j-1}|0\rangle \tag{5.8}$$

其中 $l+k\leqslant2\Omega$，$l+j\leqslant2\Omega$，$m'_1,\cdots m'_k$ 中任何一个都不等于 $m''_1\cdots m''_j-1$ 中任何一个．我们规定，一个形如 (5.8) 的态矢量在 Q 子空间中的等价态矢量是

$$\begin{aligned}&|m_11,m_1-1,\cdots m_l1,m_l-1;m'_11\cdots m'_k1,m''_1-1\cdots m''_j-1)\\&=\sqrt{\frac{(2l)!!(k+j)!}{(2l+k+j)!}}\sum_s{}'(-1)^{[s]}Sb^+_{m_11,m_1-1}\cdots b^+_{m_l1,m_l-1}\beta^+_{m'_11}\cdots\beta^+_{m'_k1}\beta^+_{m''_1-1}\cdots\beta^+_{m''_j-1}|0)\end{aligned} \tag{5.9}$$

考虑算符 $QPFQ$ 对 Q 子空间中形如(5.9)的态矢量 $|a\rangle$ 的作用，(当然 $Q|a\rangle = |a\rangle$)。这个 F 假定为 $\mathscr{H}_1$ 中的某一项. F 作用于 $|a\rangle$ 时，显然不改变 b^+ 算符的数目(也不改变 β^+ 算符的数目)，此外，由于它的特殊结构，也不改变 $(m1, m-1)$ 型指标对的数目. 因此，$FQ|a\rangle$ 在反对称化之后仍为 Q 子空间中的态矢量. 由于 P 算符兼有反对称化的作用，故 $QPFQ|a\rangle = QPQFQ|a\rangle = QFQ|a\rangle$，即 $QPFQ = QFQ$. 类似地考虑 F 向左方运算可得 $QFPQ = QFQ$.

由此可见，对这里选择的 Q 子空间来说，可以把 (5.4) 式中的 P 算符换成 1，也可以把其中的 $P\mathscr{H}_1$ 换成 $\mathscr{H}_1P$ 等等. 这样一来，$\bar{H}_Q$ 就可以写成：

$$\bar{H}_Q = Q\mathscr{H}_1Q = Q\mathscr{H}_1^+Q = Q\mathscr{H}_2Q = Q\mathscr{H}_3Q \tag{5.10}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_2 = h_0 + U^{(2)} &- 2V\left(\sum_m b^+_{m1,m-1}\right)\left(\sum_\mu \beta^+_\mu\beta_\mu\right)\left(\sum_{m'} b_{m'1,m'-1}\right)\\ &- V\left(\sum_m b^+_{m1,m-1}\right)\left(\sum_{\mu\nu} b^+_{\mu\nu}b_{\mu\nu}\right)\left(\sum_{m'} b_{m'1,m'-1}\right)\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_3 = h_0 + U^{(2)} &- V\sum_{mm'\mu} b^+_{m1,\mu}\beta^+_{m-1}\beta_{m'-1}b_{m'1,\mu} - V\sum_{mm'\mu} b^+_{\mu,m-1}\beta^+_{m1}\beta_{m'1}b_{\mu,m'-1}\\ &- V\sum_{\mu\nu mm'} b^+_{m1,\nu}b^+_{\mu,m-1}b_{\mu,m'-1}b_{m'1,\nu}\end{aligned} \tag{5.12}$$

参　考　资　料

[1] B. R. Mottelson, *Proc. Int. Conf. On Nuclear Structure, ToKyo* (1967).
B. R. Mottelson, *Nikko Summer School Lectures* (1967), *Nordita publication* No. 288.
[2] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. 2, ch. 6;
D. R. Bes and R. A. Broglia, *Proc. Topical Conf. On Problem of Vibrational Nuclei* (1975). 1.
[3] D. R. Bes and B. R. Mottelson et al, *Phys. Lett.*, **52B**(1974), 253.
[4] E. R. Marshalek, *Phys. Lett.*, **44B**(1973), 5.
E. R. Marshalek, *Nucl. Phys.*, **A224**(1974), 221.
E. R. Marshalek, *Nucl. Phys.*, **A224**(1974), 245.
[5] S. T. Beliaev and V. G. Zelevinsky, *Nucl. Phys.*, 39(1962), 582.
[6] T. Usui, *Progr. Theor. Phys.*, **23**(1960), 787.
[7] T. Marumori et al., *Progr. Theor. Phys.* (Kyoto) 31(1964), 1009.

A BOSON-FERMION DESCIPTION OF THE NUCLEAR MANY-BODY PROBLEM

Yang Ze-sen　Zhong Yu-shu　Qi Hui　Yang Li-ming

(Department of Physics, Peking University)

A new formalism of the nuclear many-body problem is established in which one can work with various physical state vector spaces consisting of both Fermions and Bosons, all being equivalent to the original one consisting only of Fermions.

With the help of the usual commutation relations and anticommutation relations between the annihilation and creation operators of Boson and Fermion, a generalized state vector space is established, which contains all the physical spaces each being equivalent to the original physical space in terms of pure Fermion operators. Transformation between the state vectors in various equivalent physical spaces are constructed. Basic operators in the original state space are transformed into effective operators in the new physical spaces.